FICHE DE LEçON

IA: Saint-Louis **IEF: Podor** **CEM: Ndieurba** **PROF: M. NDIAYE**	**MATHEMATIQUES** **Activités numériques:** **Chapitre 2 : APPLICATIONS AFFINES ET APPLICATIONS AFFINE PAR INTERVALLES :**	**DATE :** **CLASSE : 3e** **DURÉE : 10H** **EFFECTIF :**

Compétences : Intégrer les notions relatives aux applications affines, aux équations, aux systèmes d'équations, aux inéquations et aux systèmes d'inéquations, du premier degré à deux inconnues dans la résolution de problèmes liés à la vie (modélisation, détermination de grandeurs, optimisation, prévision de l'évolution de phénomènes,....)

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable d'utiliser les applications affines pour résoudre des problèmes de la vie courante.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- Déterminer l'expression littérale d'une application affine connaissant : les images de deux réels ; le coefficient de l'application affine et l'image d'un réel par cette application.
- Utiliser l'expression littérale d'une application affine pour : calculer des images ; calculer des antécédents ; établir des tableaux de valeurs.
- Représenter graphiquement une application affine dans un repère orthonormal.
- Utiliser la représentation graphique d'une application affine pour déterminer une image ou un antécédent.
- Tracer la représentation graphique d'une application affine par intervalles du type : $x \longmapsto |ax + b|$

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- Nouveau programme 2006 de mathématiques
- Manuels : Excellence 3eme; CIAM 3eme
- Guide d'usages des programmes de Maths 3eme, septembre 2012
- Guide pédagogique 3eme
- SENEMATH 3eme

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis :

Applications linéaires ; calcul de valeur numérique d'une expression littérale ; équation du type $ax + b$; valeur absolue.....

Commentaires:

On s'assurera d'abord que les élèves connaissent la définition et les propriétés d'une application linéaire et peuvent la restituer à partir d'une situation de proportionnalité ou à partir d'une représentation graphique. On n'oubliera pas que la finalité des applications affines est de résoudre des problèmes de la vie courante.

On introduira l'application affine à partir de problèmes concrets.

On pourra faire remarquer que toute application affine admet une application linéaire associée et que leurs représentations graphiques sont parallèles.

On insistera sur l'utilisation du coefficient directeur.

On se limitera à des exemples simples dans le cas d'applications constantes par intervalles

On se limitera à ce type d'applications affines par intervalles x | ax + b |.

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

Introduction:

En géométrie, une application affine est une application entre deux espaces affines qui est compatible avec leur structure. Cette notion généralise celle de fonction affine de IR dans IR ($x \to ax + b$).
Dans son « Introductio in analysin infintorum » de 1748, Leonhard Euler introduit le mot « affinité » dans une mathématique, avec une acceptation différente, lorsqu'il discute les courbes dont les abscisses et les ordonnées respectives sont dans des rapports déterminés, mais pas nécessairement égaux : « à cause de l'espèce d'analogie qu'on remarque dans les courbes qu'on obtient de cette manière, on dira qu'elles ont entre elles de l'affinité.

Du point de vue programme, la notion d'application affine n'est pas tout à fait nouvelle au programme car vous aviez étudié un de ses cas particulier en classe de quatrième, l'application linéaire.
Du point de vue intérêt, les applications affines revêtent d'une grande importance en démographie pour le calcul du taux de natalité, en économie pour le calcul du taux de production et en physique pour le calcul de la distance. A cet effet, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : Météorologie et Climatologie ; Santé ; Sécurité ;... et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation)

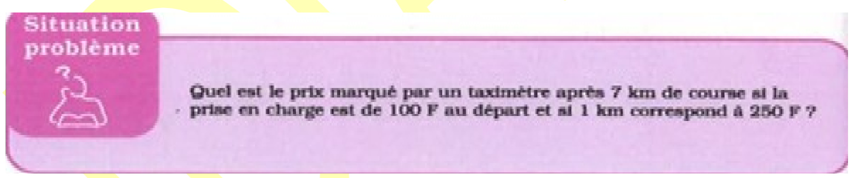
PLAN DU COURS: (Voir cours)

Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)

On donne le tableau suivant :

1	2	3	4
2	4	6	8

1) Est-ce un tableau de proportionnalité ? Si oui donne le coefficient de proportionnalité
2) Trouve l'application linéaire associée à cette situation de proportionnalité.
3) Représente graphiquement cette application linéaire.



Déroulement de la leçon:

I°) Rappels sur les applications linéaires :

1) Définition et notation :

- a étant un nombre rationnel, le procédé qui fait correspondre à tout nombre rationnel x le nombre rationnel ax est appelé application linéaire de coefficient a.
- Si f désigne cette application, on note $f : x \to f(x) = ax$
- $f(x)$ où ax est l'image de x par l'application f.

Exemples :

- $f(x) = 5x$. L'image de x par f est $5x$. (5 est le coefficient de l'application linéaire f).
- $h(x) = (-2,3)x$. (h est application linéaire de coefficient – 2,3).

 M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

2) Proportionnalité et application linéaire :

- A toute situation de proportionnalité, on peut associer une application linéaire dont le coefficient de proportionnalité est le coefficient de l'application correspondante.
- Toute application linéaire traduit une situation de proportionnalité.

Exemple :

On donne les tableaux suivants :

2	3	5
10	15	-25

-6	7	11
- 3	3, 5	5,5

a) Sont- ils des tableaux de proportionnalité ?
b) Si oui, détermine dans chaque cas l'application linéaire correspondante.

Solution : $-3 \div (-6) = 0,5$; $3,5 \div 7 = 0,5$; $5,5 \div 11 = 0,5$; $donc$ $f(x) = (0,5)x$ pour le deuxième tableau.

3) Propriétés des applications linéaires :

Soit f une application linéaire et a, b, et k, trois rationnels donnés.

- ✔ *f(a+b) = f(a) + f(b).*
- ✔ *f(ka) = k f(a).*

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{2}{3}x$

a) Calcule f(3) et f(4)
b) Calcule de deux façons différentes f(7) et f(20)

Solution : $f(3) = 2$; $f(4) = \frac{8}{3}$. $f(7) = \frac{14}{3}$ et $f(20) = \frac{40}{3}$; $f(7) = f(3+4) = f(3) + f(4)$ et $f(20) = f(5\times4) = 5f(4)$

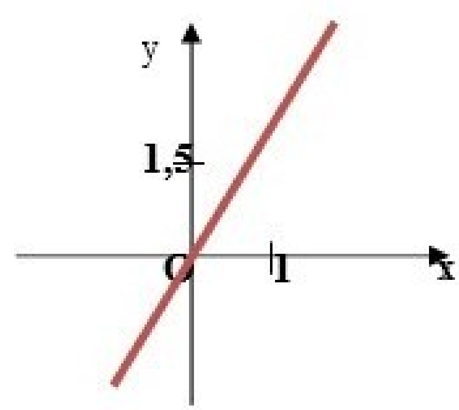
4) Représentation graphique d'une application linéaire :

Dans un repère d'axes perpendiculaires, la représentation graphique d'une application linéaire est une droite qui passe par l'origine.

Exemple :

Soit à représenter l'application linéaire suivante : *f(x) = (1,5)x* .

Dans ce cas on cherche un point : A(1 ; 1,5)



M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

II°)Applications affines :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître l'expression littérale d'une application affine et être capable de reconnaître une application affine et de déterminer l'application linéaire associée.

1) Activité :

Pour être bénéficiaire d'un repas par jour, un élève doit verser 500 F de droit d'adhésion et payer 100 F par repas.

a) Recopie et complète le tableau suivant :

Nombre de repas dans l'année	2	5	15	30	70	90
Dépense						

b) Si x est le nombre de repas pris dans l'année et y, la dépense correspondante, alors recopie et complète *: y = …..x + …..*

2) Définition :

Une application f définie sur IR est dite affine si à tout nombre réel x elle fait correspondre le nombre réel ax + b, où a et b sont deux nombres réels donnés (a = coefficient directeur et b = terme constant)

On note f : x |→ f(x) = ax + b

f(x) ou y est appelé l'image de x par l'application f et x est l'antécédent de y.

Exemples :

f(x)= 2x+3 est une application affine de coefficient directeur 2

$g(x) = -x + 3$ est une application affine de coefficient directeur -1

$h(x) = -2x$ *est une application affine de coefficient directeur -2*

$k(x) = 5$ est une application affine de coefficient directeur 0

3) Méthode :

Pour reconnaître une application affine f, on doit pouvoir identifier a et b dans l'expression **f(x)** écrite sous la forme **ax+b**.

Remarques : **Soit f (x) = ax + b**

- ✓ **Si b = 0, alors f (x) = ax ; f est une application linéaire. Exemple : f (x) = 3x**
- ✓ **Si a = 0, alors f (x) = b ; f est application constante. Exemple : f (x) = - 3**
- ✓ $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ **Donc** $\boxed{\text{coefficient} = \dfrac{\text{différence des images}}{\text{différence des antécédents}}}$

4) Exercice d'application :

Les applications suivantes sont-elles affines ? Si oui donne pour chacune son coefficient directeur.

$f(x) = 3x - 1$; $g(x) = \frac{1}{2}x$; $t(x) = 2x^2 + 1$; $i(x) = -x - 4$;

$u(x) = \frac{x+2}{x}$; $w(x) = 2x + 3 - \sqrt{5}\,x$; $m(x) = \frac{2x-1}{4}$.

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

III°) Représentation graphique d'une application affine :

Compétences exigibles
À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de représenter graphiquement une application affine dans un repère orthonormal.

1) Activité :

On donne l'application affine f définie par $f(x)= 2x + 1$

a) Recopie et complète le tableau suivant :

x	0	1	2	1,5	−1	−2	−0,5
f(x)							

b) Place les points de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ dans un repère orthonormal.

c) Que constates-tu ?

2) Définitions :

✔ La représentation graphique d'une application affine définie par **f(x)= ax+b** est la droite(Δ) d'équation **y= ax+b.**

✔ **a** est appelé coefficient directeur (ou pente) de la droite.

✔ **b** est appelé l'ordonnée à l'origine.

Remarque :

L'intersection de la droite (Δ) d'équation $y= ax+b$ avec l'axe des ordonnées est un point dont l'ordonnée est b.

3) Méthode :

Pour représenter une application affine f définie **f(x)= ax +b** dans un repère orthonormal, on utilise l'une des méthodes suivantes :

1^er^ méthode :

On détermine les coordonnées de deux points A et B de (Δ) et on trace la droite (AB) qui correspond à la droite (Δ) d'équation **y= ax+ b.**

2^eme^ méthode :

On détermine les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}(1\,;a)$ et les coordonnées d'un point C de la droite (Δ) équation **y= ax+b**. Ensuite, on trace la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Remarques :

✔ Une application linéaire est une application affine définie par $f(x) = ax$. Sa représentation graphique est la droite d'équation $y= ax$ qui passe par l'origine du repère.

✔ Une application constante est une application affine définie par $f(x)= b$. Sa représentation graphique est la droite d'équation y= b qui est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point de coordonnées (0 ; b).

Exemple :

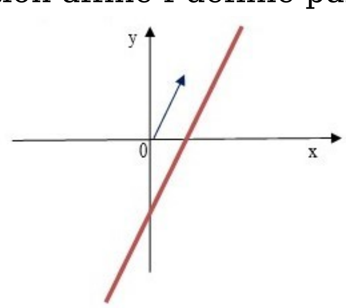
Soit à représenter graphiquement l'application affine f définie par $f(x)=2x - 3$.

1ère méthode :

$f(x) = 2x - 3$;

Si $x= 0$; $y= -3$; donc A(0 ; - 3)

Si $x= 1$; $y= -1$; donc B(1 ; - 1)



2ème méthode :

$f(x) = 2x - 3$ équivaut $y= 2x - 3$.

Soit $\vec{u}$ le vecteur directeur, donc $\vec{u}$ (1; 2)

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

Attention :

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'est pas la représentation graphique d'une application affine.

4) Exercice d'application :

*Repr*ésente dans un même repère orthonormal les applications affines définies par :
f(x)= 3x - 2 ; g(x)= 2 ; h(x) = - 4x.

IV°) Variations d'une application affine :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de déterminer les variations d'une application affine.

1) Activité :

Soient f et g deux applications tels que : f (x) = 2 x + 3 et g (x) = - 3 x + 1.

1) Quel est le signe du coefficient de f et de g ?

2) Calcule les images de -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 2 par f et g en remplissant les tableaux suivants.

x	-2	-1	0	1	2
f(x)					

Tableau 1 :

x	-2	-1	0	1	2
g(x)					

Tableau 2 :

3-a) Comment sont rangés les valeurs de x et f (x) ?

b) Comment sont rangés les valeurs de x et g (x) ?

Correction :

1) Le coef de f est positif et le coef de g est négatif.

2) Les images

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-1	1	3	5	7

Tableau 1 :

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	7	4	1	-2	-4

Tableau 2 :

3-a) Les valeurs de x et f(x) sont rangés dans le même ordre.

b) Les valeurs de x et g(x) sont rangés dans l'ordre contraire.

2) Propriétés :

Soit f une application affine définie par **f(x) = ax + b**

- Si a est strictement positif (a > 0), alors f est croissante.

  Exemple : f(x) = 2x – 5, f est croissante car a=2 > 0

- Si a est strictement négatif (a < 0), alors f est décroissante.

  Exemple : f(x)= -5x + 4, f est décroissante car a = -5< 0

- Si a est nul (a = 0), alors f est constante.

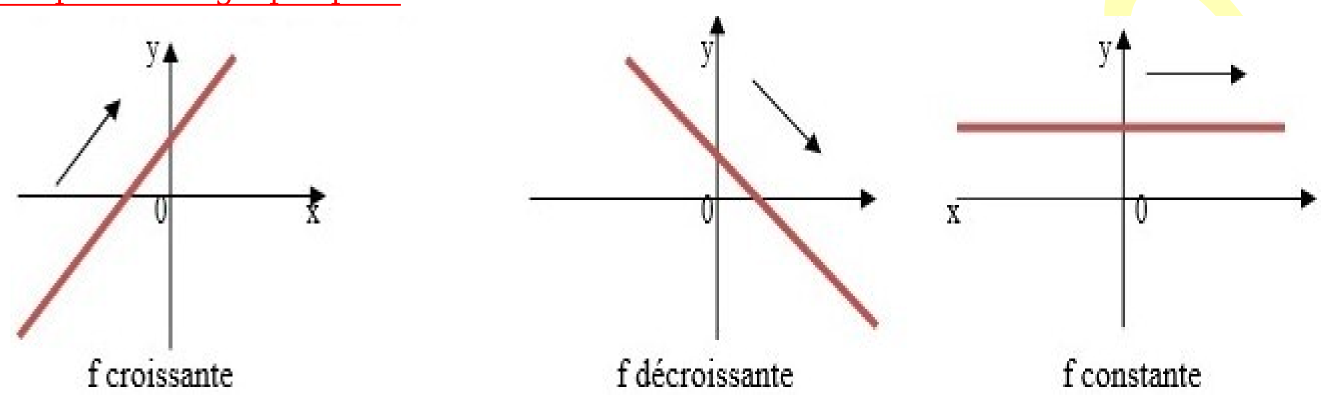
  Exemple : f(x)= 7, f est constante car a = 0

Remarque :

Dans un tableau de valeurs obtenu à partir d'une application affine f(x) :

- ✓ Si les valeurs de *x* et *f(x)* sont rangées dans le même ordre, alors l'application f est dite croissante.
- ✓ Si les valeurs de *x* et celles de *f(x)* sont rangées dans des ordres contraires, alors l'application f est dite décroissante.
- ✓ Si les valeurs de *x* sont rangées dans un certain ordre et que celles de *f(x)* restent constantes, alors l'application f est dite constante.

Interprétation graphique :



Remarque :

- Déterminer le sens de variation d'une application affine, c'est déterminer si elle est croissante, ou décroissante ou constante.
- Dans un tableau de valeurs, il faut prendre soin de ranger les valeurs de *x*, soit dans un ordre croissant, soit dans un ordre décroissant.

Exemple : Soit à ranger le tableau suivant dans un ordre.

x	4	5	1	3
f(x)	6	7	2	4

Solution :

x	1	3	4	5
f(x)	2	4	6	7

3) Exercice d'application :

Détermine les sens de variations des applications affines suivantes :

$f(x)=2x-\frac{3}{5}$; $g(x)=-\sqrt{3}x+5$; $h(x)=5$; $i(x)=\frac{x-7}{7}$; $K(x)=6-x$; $m(x)=-8$

Solution :

f est croissante car a= 2 ; g est décroissante car $a=-\sqrt{3}$; h est constante car a= 0 ; i est croissante car $a=\frac{1}{7}$; k est décroissante car a= -1 ; m est constante car a= 0.

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

V°) Détermination de l'expression littérale d'une application affine :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe je dois être capable de déterminer l'expression littérale d'une application affine.

1) Activité :

Soit f l'application affine définie par f(1) = -1 et f(2) = 1. Etant donné que $f(x) = ax + b$:

a) Recopie et complète f(1) =…+b ou -1= a+… (1) ; f(2) =2a+ … ; ou 1 = …+ b (2)

b) De l'égalité (1), donne a en fonction de b.

c) Dans l'égalité (2), remplace a par sa valeur trouvé dans l'égalité (1) et déduis de l'égalité obtenue la valeur de b.

d) Calcule alors la valeur de a et déduis *f(x).*

2) Méthode :

Déterminer l'expression **f(x) = ax + b** de l'application affine f, revient à trouver les valeurs de a et b. Pour cela, on procède comme suit :

- Si on connaît l'image d'un réel donné et le coefficient directeur de l'application f, alors on détermine b puis on en déduit f(x).

Exemple :

Soit à déterminer l'application affine f définie par : f(2) = - 3 et de coefficient directeur est - 2.

$f(x)= ax +b$; $f(x)= -2x+b$ et $f(2)= -4+ b=-3$, donc $b= 1$ et $f(x)= -2x + 1$.

- Si on connaît les images de deux réels donnés, alors on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

Exemple 1 : 1er méthode : Par Systèmes d'équations

Soit f (x) = a x + b ; f (3) = -5 et f (-2) = 5

f (3) = -5 signifie 3a + b = -5 et f (-2) = 5 signifie -2a + b = 5 ⇒ le système suivant $\begin{cases} 3a + b = -5 \\ -2a + b = 5 \end{cases}$

équivaut à a = - 2 et b =1 Donc $\boxed{f(x) = -2x + 1}$

Exemple 2 : 2eme méthode : Par le coefficient directeur

Soit f (x) = a x + b ; f (3) = -5 et f (-2) = 5

On calcule le coefficient : $a=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{-5-5}{3+2}=\frac{-10}{5}=-2$

a = -2 d'où f (x) = -2 x + b

On calcule ensuite b, en utilisant une des données. Par exemple f (-2) = -2 (-2) + b = 5 d'où b = 1

Donc $\boxed{f(x) = -2x + 1}$

3) Exercice d'application :

Détermine les expressions littérales des applications affines f et g dont les droites (représentations graphiques) respectives : (Δ) et (Δ') sont telles que :

a) (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1;3)$ et passe par le point A(5 ; 6).

b) (Δ') passe par les points B(6 ; 2) et C(-3 ; 1).

 M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

VI°) Application affines par intervalles du type : f(x) = |ax + b|:

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de représenter une application affine par intervalle du type $f(x) = |ax + b|$.

1) *Activité :*

Soit f l'application affine définie par f(x)= $|2x - 4|$

a) Ecris *f(x)* sans la valeur absolue dans l'intervalle$]-\infty; 2]$.
b) Dans un repère orthonormal (O ;I ;J), représente f(x) en te limitant à l'intervalle $]-\infty; 2]$.
c) Ecris *f(x)* sans la valeur absolue dans l'intervalle$]2; +\infty]$.
d) Représente *f(x)* dans le repère en te limitant à l'intervalle $]2; +\infty]$.

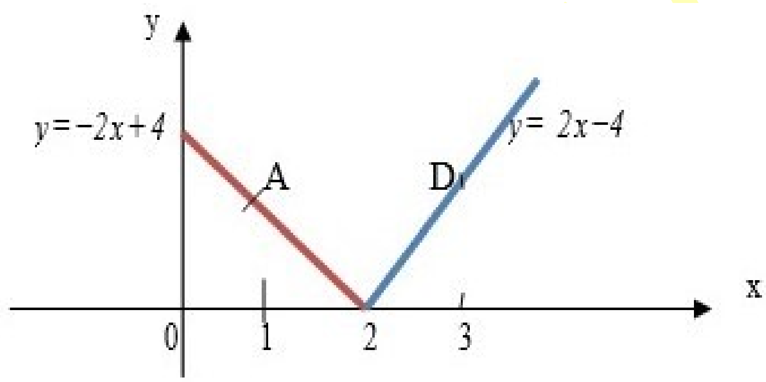
Solution :

Sur $]-\infty; 2]$; $f(x) = -2x + 4$; $si\ x \leq 2$; $c'est à\ dire\ x \in]-\infty; 2]$

On cherche deux points A(1 ; 2) ; B(2 ;0)

Sur $[2; +\infty[$; $f(x) = 2x - 4$; $si\ x \geq 2$; $c'est à\ dire\ x \in [2; +\infty[$

On cherche deux points C(2 ; 0) ; D(3 ;2)



2) *Définition :*

*La représentation graphique d'une application affine par intervalles de type **f(x)= |ax+b |** est de demi-droites.*

3) *Méthode :*

Pour représenter graphiquement une application affine f du type **f(x) = |$ax + b$|**, on procède comme suit :

- Exprimer f(x) sans le symbole de la valeur absolue sur l'intervalle]-∞ ; $-\frac{b}{a}$] , puis représenter f dans un repère orthonormal (O, I, J) en te limitant à cet intervalle.
- Exprime f(x) sans le symbole de la valeur absolue sur l'intervalle [$-\frac{b}{a}$; +∞ [puis représenter f dans le même repère en te limitant à cet intervalle.

Exemple :

Soit à représenter dans un repère orthonormal l'application affine définie par : f(x) = |2x – 1 |

Indication : utiliser un tableau pour écrire sans valeur absolue

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

4) Exemple d'applications constantes par intervalles :

Soit f l'application constante par intervalles définie par :

$f(x) = 1$ si $x \in [-2; 0[$; $f(x) = 2$ si $x \in [0; 3[$; $f(x) = 5$ si $x \in [3; 5[$

L'application f est définie sur trois intervalles. On dit de ce fait que f est une application constante par intervalles.

Pour calculer l'image d'un réel par f, il faut au préalable le situé dans son intervalle.

1. Calcule les images des réels $0 ; 4 ; -1$.
2. Représente f.

Correction :

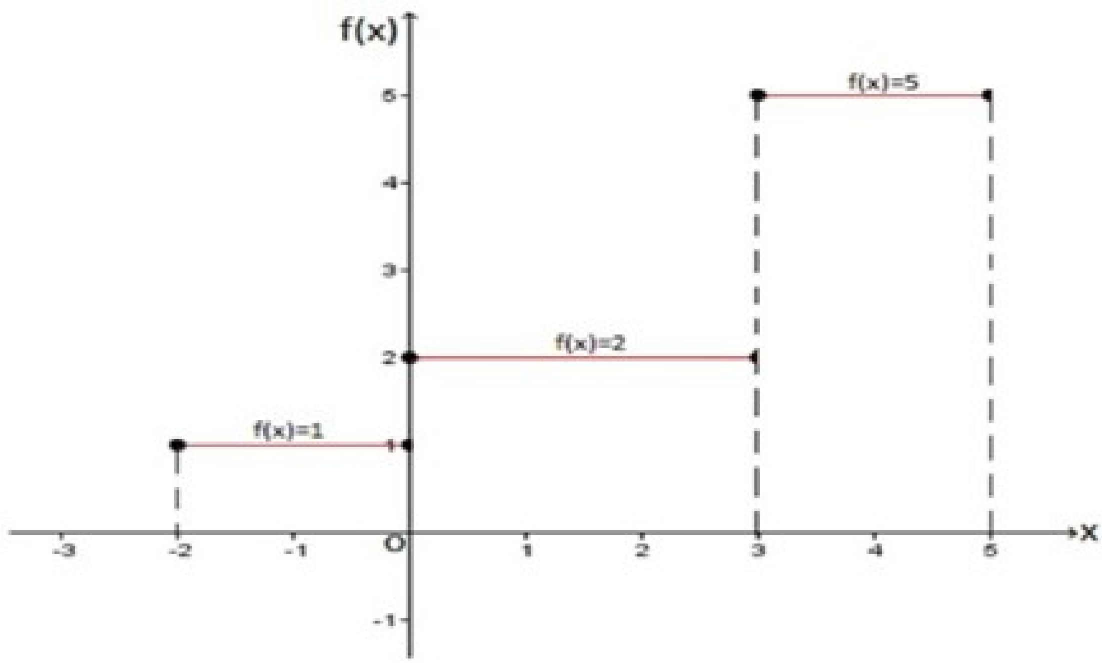
1. Calcul des images.

Image de 0 : $0 \in [0; 3[$ $f(0) = 2$

image de 4 : $4 \in [3; 5[$ $f(4) = 5$

image de -1 : $-1 \in [-2; 0[$ $f(-1) = 1$

2. Représentation graphique de f.



La représentation graphique d'une application constante par intervalles est des segments de droites.

5) Exercice d'application :

On donne les applications affines définies par :

$f(x) = |x - 1| + 2$ et $g(x) = |-2x - 4|$

1) Montre que f et g sont des applications affines par intervalles.
2) Représente f et g sur un repère orthonormal

FIN !!!