

## FICHE DE LEÇON

<b>IA: Saint-Louis</b>  <b>IEF: Podor</b>  <b>CEM: Ndiourba</b>  <b>PROF: M. NDIAYE</b>	<b>MATHEMATIQUES</b>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <b>Activités Géométriques:</b> </div>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; background-color: white; color: red;"> <b>Chapitre 2 : RELATIONS TRIGONOMETRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE :</b> </div>	<b>DATE :</b>  <b>CLASSE : 4<sup>e</sup></b>  <b>DURÉE : 7H</b>  <b>EFFECTIF :</b>
---	--	--

**Compétences :** Mobiliser les notions relatives au théorème de Thalès, aux relations trigonométriques dans un triangle rectangle, aux angles inscrits et à la géométrie dans l'espace dans la résolution de problèmes de géométrie et de problèmes liés à la vie (détermination de grandeurs).

**OBJECTIF GÉNÉRAL :** Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation de la trigonométrie pour calculer des longueurs et des mesures d'angles.

**OBJECTIFS SPÉCIFIQUES :** Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- ✎ Restituer : la définition et la notation du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; la définition et la notation du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; la définition et la notation de la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle
- ✎ Calculer : le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- ✎ Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle : connaissant un cosinus et une autre longueur ; connaissant un sinus et une autre longueur ; connaissant une tangente et une autre longueur.
- ✎ Restituer la relation entre le cosinus et le sinus d'angles complémentaires.
- ✎ Utiliser la relation entre le cosinus et le sinus d'angles complémentaires pour calculer le cosinus ou le sinus d'angle donné.
- ✎ Restituer les cosinus, sinus et tangente d'un angle de mesure  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ou  $60^\circ$ .

**SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:**

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3<sup>ème</sup>; CIAM 3<sup>ème</sup>
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3<sup>ème</sup>, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3<sup>ème</sup>
- ◆ SENEMATH 3<sup>ème</sup>

**Matériel et supports didactiques :**

- ▶ Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- ▶ Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

**Prérequis :**

Complémentarité des angles aigus dans un triangle rectangle, Pythagore, racine carrée, Triangle rectangle- angles et vocabulaire ;

**Commentaires:**

Dans ce chapitre, on entraînera les élèves à utiliser la calculatrice.

On montrera que le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres strictement compris entre 0 et 1.

On fera de nombreux exercices d'application et on proposera des procédés mnémotechniques aux élèves, leur permettant de retrouver les valeurs exactes des cosinus, sinus, tangentes des angles de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ou  $60^\circ$ .

Elles permettront de calculer les valeurs exactes de longueurs

**Introduction:**

**Du point de vue historique**, le mot « trigonométrie » vient du grec « trigonôis » qui signifie triangle rectangle et « métron » qui signifie mesure. Hipparque de Nicée (- 190 ; - 120) est le Fondateur de la trigonométrie. Ainsi, la trigonométrie est « la partie des mathématiques, étudiant les rapports entre les distances et les angles dans le triangle. »

Pendant l'antiquité et le Moyen âge, les arpenteurs se servaient déjà des relations trigonométriques pour établir leurs calculs sur le terrain.

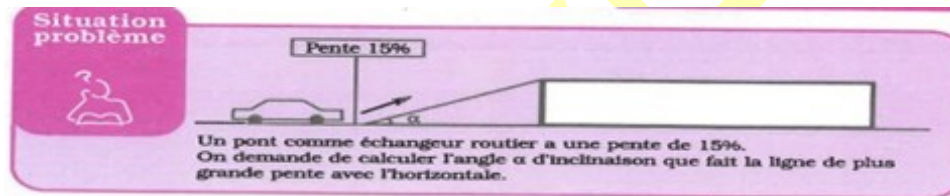
**Du point de vue intérêt**, de nos jours, ces relations sont encore utilisées en astronomie, en navigation aérienne et maritime, en cartographie, en architecture pour déterminer des angles ou des distances, en Physique,... . D'ailleurs, ce chapitre peut-être lié au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation) ; utilisation des touches de cos ; sin ; tan ; ...

**Du point de vue programme**, la notion est tout à fait nouvelle. Elle est la partie des mathématiques étudiant les rapports entre les distances et les angles dans le triangle. Comme toute les autres chapitres ; celui-ci mériterait aussi à plus d'un titre votre attention.

**PLAN DU COURS: (Voir cours)**

**Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)**

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que, AB = 4 et AC = 3. Calcule BC.
2. EFG est un triangle rectangle en G tel que, EF = 2,5 et GF = 2. Calcule GE.



**Déroulement de la leçon:**

**I°) Cosinus et sinus d'un angle aigu :**

**Compétences exigibles**

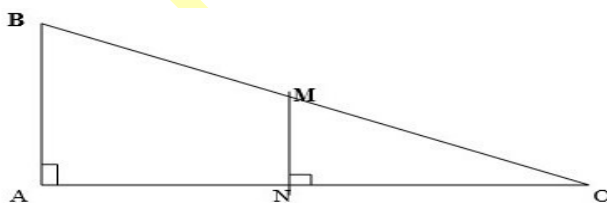
À la fin de ce paragraphe, je dois :

- a) connaître la définition et la notation du cosinus, du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ;
- b) être capable de :
  - calculer le cosinus, le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle,
  - calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant le cosinus, le sinus d'un angle aigu et la longueur d'un côté de cet angle,
  - déterminer une valeur approchée d'un angle aigu dans un triangle rectangle connaissant son cosinus, son sinus à l'aide d'une calculatrice ou d'une table trigonométrique.

**1) Activité :**

- a) Trace un triangle OAB rectangle en A tel que OA=8cm, AB=6.
- b) Calcule OB, puis le rapport  $\frac{AB}{OB}$
- c) Place un point M sur la demi-droite [OB) puis construis le point N projeté orthogonal de M sur (OA).
- d) Calcule les rapports  $\frac{ON}{OM}$  et  $\frac{NM}{OM}$

**Solution :**



$(AB) \perp (OA)$   
 $(MN) \perp (OA)$ , donc  $(AB) \parallel (MN)$ .  
 OAB triangle,  $M \in (BO)$ ,  $N \in (OA)$  et  $(AB) \parallel (MN)$ , donc  $\frac{ON}{OA} = \frac{OM}{OB}$  équivaut  
 $\frac{ON}{OM} = \frac{OA}{OB} = \frac{8}{10} = 0,8$   
 OAB triangle rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore  $BO = 10$ cm.  
 Donc  $\frac{OA}{OB} = \frac{8}{10} = 0,8$   
 $\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{OB} = \frac{ON}{OA} \Rightarrow \frac{MN}{OM} = \frac{AB}{OB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

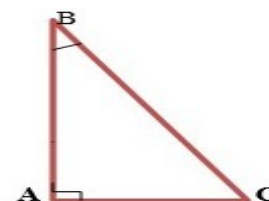
**2) Définitions et Notations :**

**a) Cosinus d'un angle aigu :**

Dans un triangle rectangle, le **cosinus** d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du **côté adjacent** à cet angle par la longueur de l'**hypoténuse**.

Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A, alors :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$



**Remarque :**

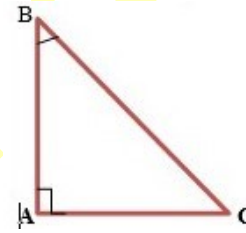
Si  $\widehat{ABC}$  est un angle aigu, alors:  $0 < \cos \widehat{ABC} < 1$ .

**b) Sinus d'un angle aigu :**

Dans un triangle rectangle, le **sinus** d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du **côté opposé** à cet angle par la longueur de l'**hypoténuse**.

Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A, alors :

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$



**Remarque :**

Si  $\widehat{ABC}$  est un angle aigu, alors:  $0 < \sin \widehat{ABC} < 1$ .

**3) Exercice d'application :**

- a) Construis un triangle LOB rectangle en L tel que OL=3cm et OB=5cm.
- b) Calcule LB, puis  $\sin \widehat{OBL}$  et  $\cos \widehat{OBL}$

**II°) Tangente d'un angle aigu :**

**Compétences exigibles**

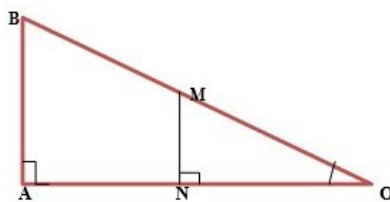
À la fin de ce paragraphe, je dois :

- a) connaître la définition et la notation de la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle ;
- b) être capable de :
  - calculer la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle,
  - calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la tangente d'un angle aigu et la longueur d'un côté de cet angle,
  - déterminer une valeur approchée d'un angle aigu dans un triangle rectangle connaissant sa tangente à l'aide d'une calculatrice ou d'une table trigonométrique.

**1) Activité :**

- a) Trace un triangle OAB rectangle en A tels que OA=8cm, AB=6cm.
- b) Calcule le rapport  $\frac{AB}{OA}$
- c) Divise le numérateur et le dénominateur de  $\frac{AB}{OA}$  par OB et exprime le rapport obtenu à l'aide du sinus et du cosinus de  $\widehat{BOA}$ .
- d) Place un point M sur la demi-droite [OB) puis construis le point N projeté orthogonal de M sur (OA). Calcule le rapport  $\frac{MN}{ON}$

**Solution :**



$$\frac{AB}{OA} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; \quad \frac{AB}{OA} = \frac{\frac{AB}{OB}}{\frac{OA}{OB}} = \frac{\sin \widehat{BOA}}{\cos \widehat{BOA}};$$

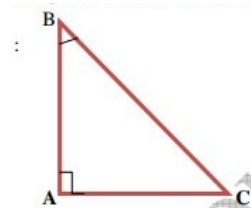
$$\frac{ON}{OA} = \frac{OM}{OB} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{MN}{ON} = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{4}$$

**2) Définition et Notation :**

Dans un triangle rectangle, la **tangente** d'un angle aigu est égale au quotient de la longueur du **côté opposé** à cet angle par la longueur du **côté adjacent**.

Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A, alors :

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB} \quad \text{ou} \quad \tan(\widehat{ABC}) = \frac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})}$$



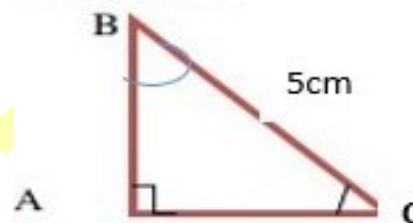
**Remarque :**

- Dans un triangle rectangle, si on connaît la longueur d'un côté, le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu, on peut calculer la longueur des deux autres côtés.

**Exemple :** Soit ABC un triangle rectangle en A tels que  $BC = 5\text{cm}$  et  $\cos B = 0,8$ . Calculer AB puis AC

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = \cos \hat{B} \times BC = 0,8 \times 5 \Rightarrow AB = 4\text{ cm}$$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow AC = 3\text{ cm}$$



- Dans ce même triangle, si on connaît la mesure d'un angle donné, on peut utiliser une calculatrice ou une table trigonométrique pour déterminer le cosinus, le sinus ou la tangente de cet angle.

**Exemple :**

L'angle  $\widehat{ABC}$  mesure  $60^\circ$

$$\cos \widehat{ABC} = \cos(60^\circ) = 0,5 \quad , \quad \sin \widehat{ABC} = \sin(60^\circ) = 0,8 \quad , \quad \tan \widehat{ABC} = \tan(60^\circ) = 1,7$$

- On peut faire de même pour déterminer une valeur approchée de l'angle si on connaît son sinus, son cosinus ou sa tangente.

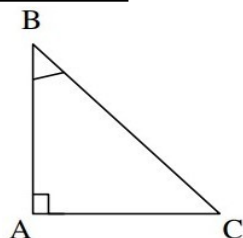
**Exemple :**

$$\begin{aligned} \cos \widehat{ABC} = 0,5 \text{ donc } \widehat{ABC} &= \cos^{-1}(0,5) = 60^\circ \quad , \\ \sin \widehat{ABC} = 0,06 \text{ donc } \widehat{ABC} &= \sin^{-1}(0,06) = 3,44^\circ \quad , \\ \tan \widehat{ABC} = 2,9 \text{ donc } \widehat{ABC} &= \tan^{-1}(2,9) = 70,97^\circ \end{aligned}$$

- Dans tous les cas, il faut regarder l'affiche de votre écran, si sa correspond à l'unité d'angle que vous voulez utiliser (DEG, RAD ou GRAD)

**3) Exercice d'application :**

- a) Soit ABC un triangle rectangle en A tels que  $\tan \widehat{ABC} = 1,5$  et  $AC = 3\text{cm}$ .  
b) Calcule AB puis déduis BC.

**Solution :**

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\tan \widehat{ABC}} = \frac{3}{1,5} = 2\text{ cm}$$

$$BC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\text{ cm}$$

**III°) Relation entre le cosinus et le sinus d'un même angle aigu :****Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la relation entre le sinus et le cosinus d'un même angle aigu et être capable de l'utiliser pour résoudre des problèmes.

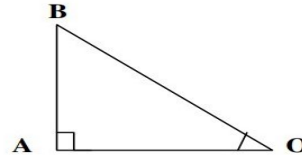
**1) Activité :**

Soit OAB un triangle rectangle en A.

- a) Écris l'égalité de Pythagore.
- b) Dédus-en la valeur de  $(\frac{OA}{OB})^2 + (\frac{AB}{OB})^2$  en divisant les deux membres par  $OB^2$ .
- c) Traduis l'égalité obtenue en utilisant le sinus et le cosinus de  $\widehat{AOB}$

**Solution :**

$$OB^2 = AB^2 + OA^2. \frac{OB^2}{OB^2} = \frac{AB^2}{OB^2} + \frac{OA^2}{OB^2} \Rightarrow 1 = \cos^2 \widehat{AOB} + \sin^2 \widehat{AOB}$$



**2) Propriété :**

Pour tout angle aigu  $\beta$  on a :  $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$

En notant  $x$  la mesure de  $\beta$  on a :  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

**Remarque :**

$$(\cos \beta)^2 = \cos^2 \beta \quad \text{et} \quad (\sin \beta)^2 = \sin^2 \beta$$

**3) Exercice d'application :**

On donne  $\cos \alpha = 0,6$ .

- a) Calcule  $\sin \alpha$  et  $\tan \alpha$
- b) Dédus-en  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près par défaut.

**Correction :**

a)  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 0,36 = 0,64 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{0,64} \Rightarrow \sin \alpha = 0,8$

$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = 0,8 / 0,6 \Rightarrow \tan \alpha = 1,333$

b)  $\alpha = \sin^{-1}(0,8) = \cos^{-1}(0,6) = \tan^{-1}(1,3333) = 53,1^\circ$

**IV°) Relation entre le cosinus et le sinus de deux angles complémentaires :**

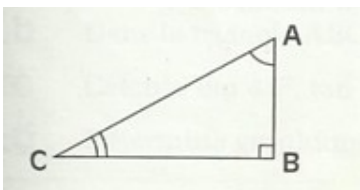
**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la relation qui lie le sinus et le cosinus de deux angles complémentaires et être capable de l'utiliser pour résoudre des problèmes.

**1) Activité :**

- a) Soit ABC, un triangle rectangle en B.
- b) Compare  $\cos \hat{A}$  et  $\sin \hat{C}$ .
- c) Compare  $\sin \hat{A}$  et  $\cos \hat{C}$ .
- d) Donne la valeur de  $\tan \hat{A} \times \tan \hat{C}$

**Correction :**



b)  $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$ ,  $\sin \hat{C} = \frac{AB}{AC}$  donc  $\cos \hat{A} = \sin \hat{C}$

c)  $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$ ,  $\cos \hat{C} = \frac{BC}{AC}$  donc  $\sin \hat{A} = \cos \hat{C}$

d)  $\tan \hat{A} \times \tan \hat{C} = \frac{BC}{AB} \times \frac{AB}{BC} = 1$

**2) Propriétés :**

★ Lorsque deux angles sont complémentaires, alors le **sinus** de l'un est égal au **cosinus** de l'autre et réciproquement.

Autrement dit, si  $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$ , alors  $\cos(\widehat{ABC}) = \sin \widehat{ACB}$  et  $\sin(\widehat{ABC}) = \cos \widehat{ACB}$ .

★ Dans un triangle rectangle, les **tangentes** des deux angles complémentaires sont inverses l'une de l'autre.

Autrement dit, si  $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$ , alors  $\tan(\widehat{ABC}) \times \tan \widehat{ACB} = 1$ .

**3) Exercice d'application :**

ABC est un triangle rectangle en A. On donne  $\cos \widehat{ACB} = 0,34$ .

a) Détermine  $\sin \widehat{ABC}$ .

b) Détermine une valeur approchée de l'angle  $\widehat{ABC}$  à 1 degré près par défaut.

**V°) Angles remarquables :**

**Compétences exigibles**  
 À la fin de ce paragraphe, je dois connaître les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle de 30°, 45° ou 60° et être capable de les utiliser pour résoudre des problèmes.

Les valeurs du cosinus, sinus et tangente des angles de mesure : 30°, 45° et 60° sont résumées dans le tableau suivant :


$\hat{\beta}$	30°	45°	60°
$\sin \hat{\beta}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \hat{\beta}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \hat{\beta}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

**Remarque :**

Lors des calculs, on utilise les valeurs exactes sauf si une valeur approchée est demandée.

**Méthode pour retenir le tableau**

- ✓ Ecris dans l'ordre croissant 30° ; 45° ; 60°
- ✓ Ecris en dessous les valeurs  $\sqrt{1}$  ;  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$
- ✓ Divise chaque terme obtenu précédemment par 2
- ✓ Tu obtiens ainsi la ligne des sinus
- ✓ Pour obtenir la ligne des cosinus, il suffit d'utiliser la propriété de la complémentarité des angles. Donc d'inverser l'ordre de la ligne des sinus.

Par Manitou «Par manitou, pour retenir ces formules, poussez ce cri indien !»	
<p>« SOH CAH TOA ! »</p> <p>S = Sinus ; O = côté Opposé ; C = Cosinus ; A = côté Adjacent ; T = Tangente et H = Hypoténuse</p> <p>« le Sinus est le rapport du côté Opposé sur l'Hypoténuse !                      le Cosinus est le rapport du côté Adjacent sur l'Hypoténuse                      la Tangente est le rapport du côté Opposé sur le côté Adjacent »</p>	

FIN !!!