FICHE DE LEçON

IA: Saint-Louis **IEF: Podor** **CEM: Ndieurba** **PROF: M. NDIAYE**	**MATHEMATIQUES** **Activités numériques:** **Chapitre 1 : RACINE CARRÉE:**	**DATE :** **CLASSE : 3e** **DURÉE : 12H** **EFFECTIF :**

Compétences : Intégrer les notions relatives à la racine carrée, aux équations et aux inéquations du premier degré à une inconnue dans la résolution de problèmes liés à la vie (modélisation, détermination d'une grandeur,....)

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'élève **doit maîtriser** l'usage des propriétés de la **racine carrée** pour résoudre des problèmes.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de la leçon, l'élève devra être capable de :

- ✔ Restituer la définition, la notation de la racine carrée d'un nombre positif non nul ;
- ✔ Calculer la valeur exacte ou une valeur approchée d'une racine carrée ;
- ✔ Reconnaître la notation ℝ ;
- ✔ Calculer la valeur numérique d'une expression littérales dans ℝ ;
- ✔ Utiliser les propriétés de la racine carrée ; de la valeur absolue d'un réel ;
- ✔ Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient ;
- ✔ Comparer des réels écrits avec des radicaux ;
- ✔ Écrire sans radical la racine carrée du carré d'un nombre ;
- ✔ Déterminer : la valeur exacte d'une expression comportant un radical ; une valeur approchée d'une expression comportant un radical à partir d'un encadrement de ce radical ou avec la calculatrice.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{eme}; CIAM 3^{eme}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{eme}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{eme}
- ◆ SENEMATH 3^{eme}

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis :

Produit AB nul ; Calcul de l'aire du carré ; Théorème de Pythagore : Opérations et propriétés dans ℚ : commutativité de l'addition, puissance, calcul littéral (développement et factorisation)

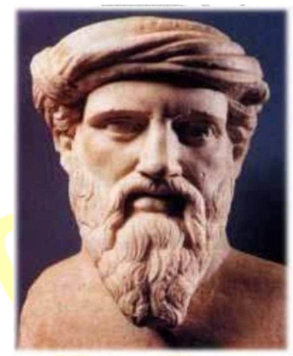
Commentaires:

Le calcul algébrique ne fera pas l'objet d'un chapitre mais, on renforcera, à chaque fois que l'occasion se présentera, les acquis de la classe de 4ème en les approfondissant (à l'occasion des chapitres sur les équations et inéquations et racine carrée)
On pourra introduire la racine carrée à l'aide de la touche (racine carrée) de la calculatrice scientifique ou à partir des équations du type : $x^2 = a$.
L'introduction des radicaux permet d'avoir quelques exemples de nombres irrationnels. Les nombres irrationnels complètent les rationnels pour former IR.On pourra faire remarquer que π est aussi un nombre irrationnel. On rappellera : *IN c Z c ID c Q c IR.*On fera remarquer que dans les propriétés des racines carrées l'égalité fonctionne " dans les deux sens". La droite graduée sera reprise et la notion d'intervalle sera approfondieOn utilisera la calculatrice

Attention $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$ entre bien dans l'objectif écrire sans radical la racine carrée du carré d'un nombre réel.

 M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

Introduction:



Par la diagonale d'un carré de côté **1cm**, les pythagoriciens trouvent le nombre **√2** en **430 av. J. C.** Ils le gardèrent longtemps secret. Dans un carré d'une telle simplicité niche un nombre indicible et jamais rencontré jusqu'alors.
Se pose l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré de côté **1cm** « incommensurabilité de racine de 2 et du rapport de la circonférence du cercle à son diamètre (le nombre π) »
Autrement dit, est- ce que toutes les grandeurs peuvent être mesurées avec tous les nombres décimaux ? Là, est venu l'idée d'inventer un autre ensemble plus grand que ℚ : IR.
Du point de vue intérêt, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes tels que : Développement durable ; Energie ; ... et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation) ; avec usage des calculatrices ; ...

PLAN DU COURS: (Voir cours)

Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)

Exercice 1
Développe :
$(3x + 2)^2$, $(x - 3)^2$, $(x - 1)(x + 1)$, $(2x - \frac{1}{2})^2$

Exercice 2
Factorise :
$x^2 - 4$, $4x^2 - 9$, $x^2 + 2x + 1$, $4x^2 - 4x + 1$

Exercice 3
1) ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 3.
Calcule BC.
2) Construis un triangle ABC tel que : AB = 6, BC = 8 et AC = 10.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

Situation problème

Devenu plus grand, Birame ne peut plus se coucher correctement dans le sens des dimensions de son lit rectangulaire de longueur 150 cm et de largeur 100 cm. Se couchant suivant une des diagonales de ce lit, il se rend compte que sa taille correspond à 1 cm près à la longueur de celle-ci. Calcule la taille de Birame à 1 cm près.

Déroulement de la leçon :

I°) Définitions et notations, valeur exacte et valeur approchée :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la définition et la notation de la racine carrée d'un nombre positif.

1) Activité :

On donne les mesures suivantes correspondantes à l'aire d'un carré : 16 m². ; 36 m² et 25m²
A l'aide de ta calculatrice trouve pour chaque cas le côté du carré.

2) Définitions et notations :

Soit **a** un nombre rationnel positif ou nul, on appelle racine de **a**, le nombre positif ou nul dont le carré est **a**.
On le note $\sqrt{a}$. Le symbole « √ » est appelé **radical** et le réel **a** est le **radicande**.
$\sqrt{a}$ se lit « racine carrée de a ».

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

Conséquence immédiate de la définition :

$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ et $\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad et\, |-3| = 3 \quad donc\, \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

$\sqrt{(3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3| \quad d'où \quad \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{(3)^2}$

On a : $5^2 = 25$ et $(-5)^2 = 25$, le nombre positif dont le carré est 25 est 5 donc $\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$

3) Valeur exacte et valeur approchée :

Soit la racine carrée de 7, elle se note $\sqrt{7}$. La valeur exacte de ce nombre est égale à $\sqrt{7}$.

$\sqrt{7}$ = 2,64575131.....

2, 645 est la valeur approchée à 0,001 (10^{-3}) près par défaut et 2,646 est la valeur approchée par excès.

4) Exercice d'application :

Soit $P = \sqrt{11}$

a) Calcule P^2.

b) Donne la valeur exacte de P.

c) Détermine la valeur approchée de P à deux unités près par défaut.

d) Donne la valeur approchée de P à 0,01 près par excès.

e) Encadre P à 10^{-2} près.

II°) Nombres irrationnels : ensemble IR des nombres réels :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître un nombre irrationnel et je dois connaître la notation ℝ de l'ensemble des nombres réels.

1) Activité :

1) A l'aide d'une calculatrice, détermine : $\sqrt{3}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{2}$; π ; $\sqrt{196}$

2-a) Parmi ces nombres, quels sont ceux qui ne sont pas des nombres rationnels ?

b) Ceux qui sont des nombres rationnels ?

2) Définitions et notations :

- Un nombre irrationnel est un nombre qu'on ne peut pas écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ (où a et b sont des entiers relatifs et $b \neq 0$). Autrement dit c'est un nombre qui n'est pas rationnel.
- Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble IR des nombres réels.
- L'ensemble des nombres réels positifs est noté IR_+ : intervalle [0 ; +∞[
- L'ensemble des nombres réels négatifs est noté IR_- : intervalle] -∞ ; 0]
- L'ensemble des nombres réels non nuls est noté IR^* : intervalle] -∞ ; 0[U] 0 ; + ∞ [
- L'ensemble des nombres réels positifs non nuls est noté IR^*_+ : intervalle] 0; + ∞ [
- L'ensemble des nombres réels négatifs non nuls est noté IR^*_- : intervalle] - ∞ ; 0 [
- On a IN c Z c ID c Q c IR.

3) Exercice d'application :

a) Quelles sont les nombres irrationnels parmi les nombres suivants :

$\sqrt{16}$; $\sqrt{5}$; π ; $\sqrt{36}$; $\sqrt{\pi}$

b) Recopie et complète les pointillés par ∈ ou ∉

$\sqrt{8} \ldots . \mathbb{R}$; $\pi \ldots \mathbb{Q}$; $\sqrt{1} \ldots \mathbb{R}_{-}$; $-\sqrt{12} \ldots \mathbb{Q}$; $-\sqrt{0,09} \ldots \mathbb{R}^*_{+}$; $2\pi \ldots \mathbb{R}$; $0,03 \ldots \mathbb{R}^*$.

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

III) Propriétés de la racine carrée :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser les propriétés de la racine carrée.

1) Activité :

Soient les nombres $A=\sqrt{4}\times\sqrt{25}$; $B=\sqrt{4\times25}$; $C=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{49}}$; $B=\sqrt{\frac{4}{49}}$

a) Calcule A et B à laide de la calculatrice, puis compare les résultats obtenus.
b) Fais de même pour C et D.

2) Propriétés :

Quel que soit (∀) a ∈ IR+et b ∈ IR+, alors $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

Exemple :

$\sqrt{4x9} = \sqrt{4}\text{ x }\sqrt{9}$

$\sqrt{36} = 2\text{x }3$

6= 6 vrai

Quel que soit (∀) a ∈ IR$_+$; et b ∈ IR*+, alors $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$. En particulier $\sqrt{\frac{1}{b}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}$

Exemple :

$$\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$$

Remarque :
a et b étant deux nombres réels positifs ou nuls, si $\sqrt{a}=b$, alors a = b^2

Attention :
Si $a\leq0$ *et* $b\leq0$ *on a :* $ab\geq0$ *donc* $\sqrt{a}$ *et* $\sqrt{b}$ n'existent pas dans IR, mais $\sqrt{ab}$ existe.

Exemple :
$\sqrt{-3}$ *et* $\sqrt{-5}$ n'existent pas dans IR, mais $\sqrt{(-2)\times(-8)}=\sqrt{16}$ car $(-2)\times(-8)=16$

Remarque : $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$ *et* $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$

Contre-exemples :

$\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ et $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$, on voit bien que $7\neq5$ donc $\sqrt{16}+\sqrt{9}\neq\sqrt{16+9}$

$\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$ et $\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ $2\neq4$, donc $\sqrt{25}-\sqrt{9}\neq\sqrt{25-9}$

Donc $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$ *et* $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$

3) Exercice d'application :

Calcul de deux manières différentes :

$A=\sqrt{6}\times\sqrt{24}$; $B=\sqrt{2}\times\sqrt{8}$; $C=\sqrt{4\times9}$

$D=\sqrt{\frac{4}{9}}$; $E=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}}$

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

IV°) Calculs sur les radicaux :

1) Sommes algébriques :

a) Activité :

a) Ecris les radicaux suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a ∈ IN et b ∈ IN :
$\sqrt{18}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{48}$

b) Déduis-en une écriture simplifiée des sommes algébriques suivantes :
C= : $\sqrt{18}+2\sqrt{50}+3\sqrt{32}$
D= $\sqrt{50}-\sqrt{32}+\sqrt{48}$

b) Propriétés :

- Quels que soient les réels b et c et le réel a≥0, on a : $b\sqrt{a}+c\sqrt{a}=(b+c)\sqrt{a}$ et $b\sqrt{a}-c\sqrt{a}=(b-c)\sqrt{a}$
- Si p ∈ IN et a ≥ 0, alors $\sqrt{a^{2p}}=\sqrt{(a^p)^2}=a^p$

Exemple :

E= $\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{80}$
E= $(1+2-4)\sqrt{5}$
E= $-\sqrt{5}$

2) Expressions conjuguées : rendre rationnel le dénominateur d'un quotient :

Compétences exigibles
À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant un ou plusieurs radicaux.

a) Vocabulaire :

Soient a et b deux réels (b≥0)

- L'expression conjuguée de $(a+\sqrt{b})$ est $(a-\sqrt{b})$
- L'expression conjuguée de $(a-\sqrt{b})$ est $(a+\sqrt{b})$

Exemple :

L'expression conjuguée de $(7+\sqrt{3})$ est $(7-\sqrt{3})$
L'expression conjuguée de $(-10-\sqrt{5})$ est $(-10+\sqrt{5})$
L'expression conjuguée de $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ est $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

b) Méthode :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant un ou plusieurs radicaux, on multiplie le numérateur et le dénominateur de ce quotient par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple :

Soit à rendre rationnel les dénominateurs des rationnels suivants :

$$I = \frac{2-\sqrt{3}}{4+\sqrt{7}} \;; \qquad J=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-6} \;; \qquad K=\frac{7}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}.$$

Remarque : $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$ (On a multiplié le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2}=\frac{\sqrt{a}}{a}$)

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

3) Comparaison de réels comportant des radicaux :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de comparer des nombres réels comportant des radicaux.

a) Activité :

On donne $x=\sqrt{11}$ et $y=\sqrt{13}$

a) Calcule x^2 et y^2.

b) En utilisant une calculatrice, donne une valeur approchée à $\frac{1}{100}$ près par défaut de x et y.

c) Recopie et complète par le symbole < ou > qui convient : x^2.......y^2 ; x.......y

b) Propriétés

- Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrées.

Autrement dit, si $x \in IR_+$, $y \in IR_+$ et $x^2 > y^2$, alors $x > y$.
si $x \in IR_+$, $y \in IR_+$ et $x^2 < y^2$, alors $x < y$.

Exemple :

Soit à comparer $2\sqrt{3}$ et $\sqrt{10}$

- Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de celui de leurs carrées.

Autrement dit, si $x \in IR_-$; $y \in IR_-$ et $x^2 < y^2$, alors $x > y$.
si $x \in IR_-$ $y \in IR_-$ et $x^2 > y^2$, alors $x < y$.

Exemple :

Soit à comparer $-3\sqrt{5}$ *et* $-4\sqrt{2}$

Remarque:

Pour comparer des nombres réels comportant des radicaux, on peut utiliser un encadrement de ces nombres ou une calculatrice pour obtenir leurs valeurs approchées.

Exemple :

Soit à comparer les nombres suivants : $17-3\sqrt{2}$ et $7+\sqrt{5}$

(On utilise une calculatrice, puis on encadre)

4) Intervalles dans IR:

Soient a et b des réels. Le tableau suivant résume la liste des intervalles dans IR :

Intervalles dans IR		
Ecriture	Intervalle	Ensemble des réels x tels que
[a ; b]	fermé en **a** et en **b**	$a \leq x \leq b$
[a ; b[	fermé en **a** et ouvert en **b**	$a \leq x < b$
]a ; b]	ouvert en **a** et fermé en **b**	$a < x \leq b$
]a ; b[	ouvert en **a** et **b**	$a < x < b$
[b ; +∞[	des nombres supérieurs ou égaux à **b**	$x \geq b$
]b ;+∞[	des nombres strictement supérieurs à **b**	$x > b$
]−∞; a]	des nombres inférieurs ou égaux à **a**	$x \leq a$
]− ∞ ; a[	des nombres strictement inférieurs à **a**	$x < a$
]− ∞ ; +∞[	de tous les réels	$x \in IR$

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

5) Exercice d'application :

Soient : $a = 7 + 2\sqrt{2}$ $b = 7 - 2\sqrt{2}$

1) Calcule $\frac{a}{b}$
2) Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, encadre $\frac{a}{b}$.
3) Montre que $a + b$ et $a^2 + b^2$ sont des entiers.

V°) Valeur absolue d'un réel:

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître les propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel et être capable de les utiliser.

1) Propriétés:

➔ La valeur absolue du produit de deux nombres réels est égale au produit des valeurs absolues de ces deux réels.

Autrement dit, si $a \in IR$ et $b \in IR$, alors $|a \times b| = |a| \times |b|$.

Exemple :

$|-2 \times (-3)| = |-2| \times |-3|$

$|6| = 2 \times 3$ vrai

➔ La valeur absolue du quotient de deux nombres réels est égale au quotient des valeurs de ces réels.

Autrement dit, si $a \in IR$ et $b \in IR^*$, alors $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Exemple : $\left|\frac{-\sqrt{8}}{7}\right| = \frac{|-\sqrt{8}|}{|7|} = \frac{\sqrt{8}}{7}$

2) Exercice d'application:

Calcule les expressions suivantes sans la valeur absolue :

$|-5 \times (-7)|$; $\left|\frac{13}{-13}\right|$; $|x \times y|$ $(x \in IR_+ ; y \in IR_-)$; $\left|\frac{x}{y}\right|$ $(x \in IR_- ; y \in IR_+)$

VI°) Racine carrée du carré d'un réel :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'écrire la racine carrée du carré d'un nombre réel sans radical.

1) Activité:

a) Recopie et complète le tableau suivant :

x	x^2	$\sqrt{x^2}$	$\lvert x \rvert$
3			
-3			
$\sqrt{5}$			

b) Pour chaque cas, compare $\sqrt{x^2}$ et $|x|$

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251

2) Propriétés:

Pour tout nombre réel, la racine carrée de son carré est égale à la valeur absolue de ce nombre.

Autrement dit, si a∈ IR, alors $\sqrt{a^2}=|a|$

Remarques:

$\sqrt{(a)^2}$ n'est pas toujours égale à $(\sqrt{a})^2$.

Exemple :

$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$; mais $(\sqrt{-3})^2$ n'existe pas.

Si x∈ IR, alors $|x| = \begin{cases} x \text{, si } x > 0 \\ 0 \text{, si } x = 0 \\ -x \text{, si } x < 0 \end{cases}$

Exemple :

$$\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3; \text{si } x > 3 \\ 0; \text{si } x = 3 \\ -x+3; \text{si } x < 3 \end{cases}$$

3) Exercice d'application:

Écris sans radical les nombres réels suivants :

$\sqrt{(-30)^2}$; $\sqrt{(5-\sqrt{6})^2}$; $\sqrt{(2x-2)^2}$; $\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}$; $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$

FIN !!!!

M. NDIAYE 2.0 @@@ M/SVT sambandiaye813@gmail.com 772913251