UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT

E.mail : office@ucad.edu.sn

site web : officedubac.sn

22 G 22 B N°1

Durée : 2 heures

Séries : S1-SA-S3 – Coef. 8

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

Corrigé

EXERCICE 1 (7 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(2;4;1)$, $B(0;4;-3)$, $C(3;1;-3)$, $D(1;0;-2)$, $E(3;2;-1)$ et le vecteur $\vec{n}(12;12;-6)$.

Pour chacune des sept affirmations suivantes, dire en justifiant si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. *Une équation du plan (ABC) est : $2x+2y-z-11=0$.*

Soit $M(x,y,z)\in(ABC)$; $\overrightarrow{AM}(x-2;y-4;z-1)$ $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)$, $\overrightarrow{AC}(1;-3;-4)$.

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-12\\6\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$ $\begin{pmatrix}x-2\\y-4\\z-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-12\\-12\\6\end{pmatrix}=0,\ -12x+24-12y+48+6z-6=0$

$-12x-12y+6z+66=0$, donc (ABC) : $2x+2y-z-11=0$ **VRAIE** **1 pt**

2. *Le point E est le projeté orthogonal de* D *sur le plan (ABC).*

$\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}=2-6-4=-8\neq0$

$\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}=-4-4=-8\neq0$ **FAUSSE** **1 pt**

3. *Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.*

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$

on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=4-4=0$, donc les droites (AB) et (CD) sont orthogonales. **VRAIE** **1 pt**

4. *La droite (CD) est donnée par la représentation suivante :* $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+t\ ,\ t\in IR.\\z=1-t\end{cases}$

Soit (Δ) la droite dont une représentation est : $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+t\ ,\ t\in IR\\z=1-t\end{cases}$*. Vérifions si $C\in(\Delta)$. En effet si $C\in(\Delta)$ alors $3=-1+t$ et $1=-1-t$ ce qui est absurde donc $C\notin(\Delta)$ par conséquent la droite (CD) n'est pas donnée par la représentation :* $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+t\ ,\ t\in IR.\\z=1-t\end{cases}$

En effet (CD): $\begin{cases}x=3-2t\\y=1-t\\z=-3+t\end{cases}$. **FAUSSE** **1 pt**

5. *Le point* A *est sur la droite (CD).*

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-4\\-3\end{pmatrix}$, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. **FAUSSE** **1 pt**

6. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{n}$.

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-12\\-12\\6\end{pmatrix}$ $\vec{n}(12;12;-6)$. **FAUSSE** **1 pt**

7. *Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC).*

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}12\\12\\-6\end{pmatrix}.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix} = -24+24=0$

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}12\\12\\-6\end{pmatrix}.\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix} = 12-36+24=0$

Ou encore que $\overrightarrow{n}$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ **.** **VRAIE** **1 pt**

EERCICE 2 (6 points)

Dans le plan orienté $\mathbb{P}$, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AB = 2\,AD$.

Soit I le milieu de $[AB]$, et (C) le cercle circonscrit au rectangle $ABCD$.

Soit f la similitude directe qui transforme B en I et I en D .

1. *Déterminons le rapport k et une mesure de l'angle θ de f.*

Le rapport $\boldsymbol{k=\frac{ID}{IB}=\sqrt{2}}$ et l'angle $\boldsymbol{\theta=\left(\overrightarrow{BI}\,;\overrightarrow{ID}\right)=\left(\overrightarrow{IA}\,;\overrightarrow{ID}\right)=-\frac{\pi}{4}(2\pi)}$**.** **0,5 pt + 0,5pt**

2. *Soit (E_1) l'ensemble des points M du plan tels que* $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MI}\right)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

a) *Justifions que C appartient à (E_1).*

On a : $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CI}\right)=-\frac{\pi}{4}(2\pi)}$, donc **$\boldsymbol{C}$ appartient à $\boldsymbol{(E_1)}$.** **0,5 pt**

b) *Déterminons et construisons (E_1).*

L'ensemble (E_1) est l'arc capable relatif au segment $[BI]$ et à l'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$.

C'est donc l'arc de cercle, contenant C, du cercle circonscrit au triangle BIC, B et I exclus. **0,5 pt**

Construction (voir figure). **0, 25 pt**

3. *Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan tels que* $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MD}\right)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Déterminons et construisons (E_2).

L'ensemble $\boldsymbol{(E_2)}$ est le demi-cercle de diamètre $\boldsymbol{[BD]}$ contenant $\boldsymbol{C}$, car

$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{\pi}{2}(2\pi)}$. **($\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D}$ exclus)** **0, 25 pt**

Construction (voir figure). **0, 25 pt**

4. *Déduisons des questions précédentes le centre de f.*

Soit Ω le centre de f. On a **:**

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{\Omega B}\,;\overrightarrow{\Omega I}\right)=-\frac{\pi}{4}(2\pi)\\ \left(\overrightarrow{\Omega I}\,;\overrightarrow{\Omega D}\right)=-\frac{\pi}{4}(2\pi)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\overrightarrow{\Omega B}\,;\overrightarrow{\Omega I}\right)=-\frac{\pi}{4}(2\pi)\\ \left(\overrightarrow{\Omega I}\,;\overrightarrow{\Omega D}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega B}\,;\overrightarrow{\Omega I}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}(2\pi)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\overrightarrow{\Omega B}\,;\overrightarrow{\Omega I}\right)=-\frac{\pi}{4}(2\pi)\\ \left(\overrightarrow{\Omega B}\,;\overrightarrow{\Omega D}\right)=-\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases}$$

On en déduit que **$\boldsymbol{\Omega}$ est le point d'intersection de $\boldsymbol{(E_1)}$ et $\boldsymbol{(E_2)}$, c'est-à-dire que le point $\boldsymbol{C}$ est centre de $\boldsymbol{f}$.** **0,5 pt**

5. *Soit $A' = f(A)$. Montrons que D est le milieu de $[\,A'I\,]$* puis *construisons le point A' .*

On a : $f(B)=I$; $f(I)=D$ *et* $f(A)=A'$. On en déduit :

- D'une part, $\begin{cases}A'I=\sqrt{2}\,AB\\ A'D=\sqrt{2}\,AI\end{cases}$. Comme I est milieu de $[AB]$, $A'D=\frac{1}{2}A'I$. **$(\boldsymbol{\alpha})$**
- D'autre part, $\begin{cases}\left(\overrightarrow{A'D}\,;\overrightarrow{AI}\right)=\frac{\pi}{4}(2\pi)\\ \left(\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{A'I}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'I}\right)=-\frac{\pi}{4}(2\pi)\end{cases}$.

On en déduit que $\left(\overrightarrow{A'D}\,;\overrightarrow{A'I}\right) = 0(2\pi)$ et que $\overrightarrow{A'D}$ et $\overrightarrow{A'I}$ sont colinéaires et de même sens **($\boldsymbol{\beta}$).**

D'après **($\boldsymbol{\alpha}$)** et **($\boldsymbol{\beta}$)**, ***D* est le milieu de** [$\boldsymbol{A'I}$] . **0,5 pt**

Construction (voir figure). **0, 25 pt**

6. *La demi-droite* [CA') *recoupe* (C) *en* K .

a) *Calculons* CK *et CA' en fonction de* CA .

on a : $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(C) = C \end{cases}$, donc $\dfrac{A'C}{AC} = \sqrt{2}$, par conséquent $\boldsymbol{CA' = \sqrt{2}\ CA}$. **0,5 pt**

Démontrons que le triangle CAK est rectangle isocèle en K.

Comme K appartient au cercle de diamètre $[AC]$, alors CAK est rectangle en K de plus

$\left(\overrightarrow{KC}\,;\overrightarrow{KA}\right) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ et $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CA'}\right) = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$, K appartient au segment $[A'C]$ alors

$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CK}\right) = -\frac{\pi}{4}(2\pi)}$.

En considérant le triangle CAK, on montre que l'angle $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{AK}\,;\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{4}(2\pi)}$.

Donc le triangle AKC est isocèle en K.

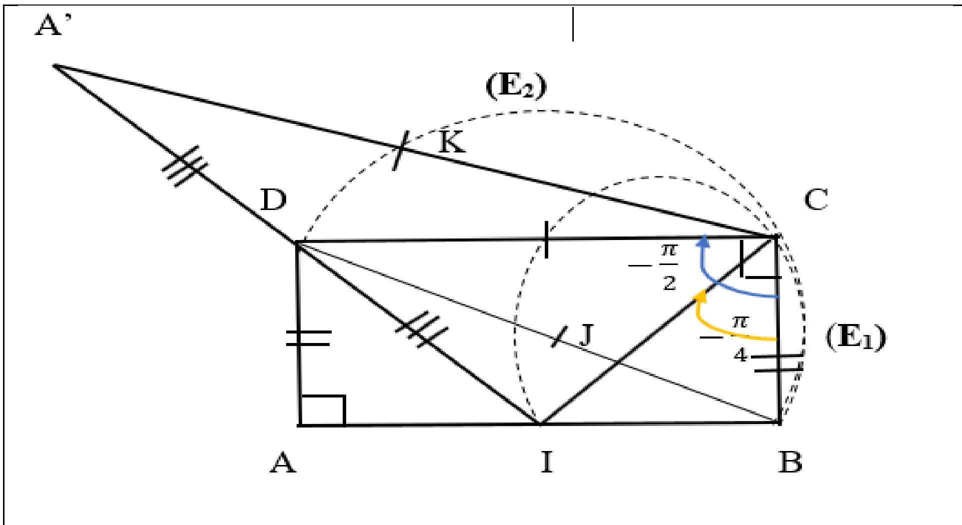
Par suite CAK est rectangle isocèle en K donc $\boldsymbol{CK = \frac{\sqrt{2}}{2}CA}$. **0,5 pt**

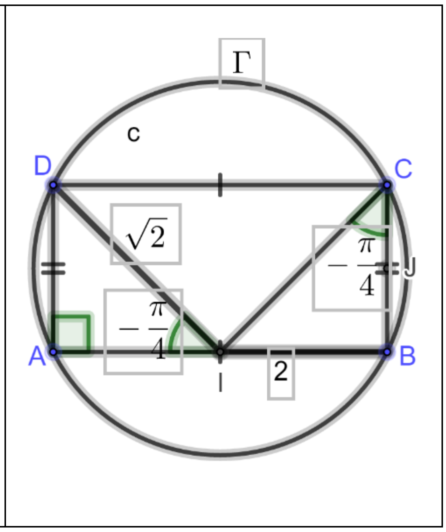
b) *Déduisons-en que* K *est le milieu de* [CA'] .

$$\begin{cases} K \text{ appartient au segment } [A'C] \\ CA' = \sqrt{2}\ CA \\ CK = \dfrac{\sqrt{2}}{2} CA \end{cases} \Longrightarrow \text{K est le milieu de [CA'] .}$$ **0,5 pt**

c) *Prouvons alors que* K $= f(J)$.

$\begin{cases} f(A) = A' \\ f(C) = C \\ J \text{ milieu de } [AC] \\ \text{K milieu de [CA']} \end{cases}$, par conséquent $\boldsymbol{f(J) = K}$. **0,5 pt**





EXERCICE 3 **(7 points)**

Soit $p \in IN$. On considère la suite $(S(p,n))$ $n \in IN^*$ définie par :

$$S(p,n) = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p}.$$

1. *Calculer* $S(1;\ 2)$ et $S(2\,;1)$.

$S(1\,,2) = \frac{1}{(2+1)^1} + \frac{1}{(2+2)^1} = \frac{7}{12}$ et $S(2;\ 1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$ **1 pt + 1 pt**

2. *Montrer que si* $p \geq 2$ *, alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} S(p,n) = 0$.

Pour $p \geq 2$ on a $\forall k \in IN^*,\ n+k \geq n+1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$

$\Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{(n+k)^p} \leq \frac{1}{(n+1)^p} \Longrightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^p}$

$\Longrightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p} \leq \frac{n}{(n+1)^p} \Longrightarrow 0 \leq S(p,n) \leq \frac{n}{(n+1)^p}$

comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{(n+1)^p} = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S(p,n) = 0$. **1 pt**

3. *Montrer que* $(S(1\,,n))$ *est croissante et majorée.*

$$S(1\,,n+1) - S(1\,,n) = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{2n}$$
$$= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Par suite $S(1\,,n+1) - S(1\,,n) \geq 0$ d'où $(S(1\,,n))$ est croissante.

$S(1\,,n) \leq \frac{n}{n+1} \Longrightarrow S(1\,,n) \leq 1$ par conséquent $S(1\,,n)$ est majorée. **1 pt**

4. *Soit* f *la fonction définie sur* $[0\,;1]$ *par :* $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

a. *Montrons que pour tout* $n \geq 2$ et $k \in [1; n-1]$, *on a* :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

$f(x) = \frac{1}{1+x}$, f est dérivable sur $[0\,;1]$ et $\forall\, x \in [0\,;1]$, $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$. f'est négative donc f est décroissante sur$[0\,;1]$.

$\forall\, x \in \left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right], f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\Longrightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx$

$\Longrightarrow \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ **1 pt**

b. *En déduire que* : $S(1,n) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq S(1,n) + \frac{1}{n}$.

Comme $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad S(1,n) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq S(1,n) + \frac{1}{n} f(0) - \frac{1}{n} f(1)$$

Or, $f(0) - f(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$, donc $S(1,n) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq S(1,n) + \frac{1}{2n}$ **1 pt**

c. *Déterminer alors la limite de la suite* $(S(1,n))$.

De la relation précédente, on tire

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2n} \leq S(1,n) \leq \int_0^1 f(x)dx$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to\infty} S(1,n) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$ **1 pt**