COMPOSITION REGIONALE DU SECOND SEMESTRE 2022-2023 :

MATHEMATIQUES : Terminale S2 / Jour 2 / Durée: 04h (08h-12h)

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

Exercice 1 : (2,5 pts)

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n.

1. a) Exprimer U_n puis V_n en fonction de n. **(0,5 pt) + (0,5 pt)**

b) En déduire z_n en fonction de n. **(0,5 pt)**

2. Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ **(1 pt)**

Exercice 2 : (3,5 pts)

1. Soit $P(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$, $z \in \mathbb{C}$.
a. Démontrer que $2 + i$ est une racine de $P(z)$. **(0,5 pt)**
b. En déduire les autres solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$. **(1 pt)**
2. Dans le plan (P) reporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité 1cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + i$; $-1 - 2i$ et $-4 + i$.
Déterminer la nature précise du triangle ABC. **(1 pt)**
3. Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme le point A en C.
a. Montrer que l'application f associée à r est définie par $f(z) = iz - 3 - i$. **(0,5 pt)**
b. Préciser les éléments caractéristiques de la transformation r. **(0,5 pt)**

Exercice 3: 4 points

Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela, il a droit au plus à deux tentatives : un premier service suivi, s'il n'est pas réussi, d'un second service.

La probabilité que le premier service réussisse est égale à $\frac{2}{3}$. S'il a échoué au premier, la probabilité que le deuxième service réussisse est égale à $\frac{4}{5}$.

Lorsque les deux services échouent, il a « double faute ». Sinon, la mise en jeu est réussie.

1°) a) Donnez la probabilité que le second service ne soit pas réussi sachant que le premier service n'est pas réussi. **(01 pt)**

b) Montrer que, sur une mise en jeu, la probabilité que ce joueur fasse une « double faute » est égal à $\frac{1}{15}$.

(01 pt)

c) Déduisez-en la probabilité que la mise en jeu soit réussie. **(0,5 pt)**

2°) Ce joueur fait un pari avec un de ses camarades. Il effectue dix mises en jeu successives (de manière indépendante).

S'il réussit dix ou neuf mises en jeu, il gagne 1 000 F par mise en jeu réussi. Sinon il perd 5 000 F.

On appelle X la variation aléatoire représentant la somme gagnée (comptée positivement), ou perdue (comptée négativement), par ce joueur.

a) Exprimer en fonction de $k (k \in \{0,1,2, ...,10\})$ la probabilité P_k que le joueur réussisse k mises en jeu. **(0,75 pt)**

b) Calculer : $p(X = 10\,000); p(X = 9\,000); p(X = -5\,000)$. **(0,75 pts)**

c) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X). **(01 pt)**

On donnera les résultats à 10^{-2} près par défaut.

Problème (10 points)

Pour réaliser le dessin de son domaine, un urbaniste a muni le plan d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm. La voie traversant le domaine est assimilée dans le plan, à la courbe (C_f) de la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x\ln(1-x) + 1 & si\ \ x < 0 \\ (x+1)e^{-x} & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$

Le but de ce problème est d'aider cet urbaniste à tracer (C_f) puis à déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie réservée pour l'aménagement des espaces verts.

<u>Partie A : Etude de signe d'une fonction auxiliaire.</u>

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \ln(1-x) + \frac{x}{x-1}$

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations. (0.75pt)
2. Calculer $g(0)$ puis en déduire le signe de g sur (D_g). (0.75pt)

<u>Partie B : Etude de la fonction f.</u>

1. a. Justifier que $D_f = \mathbb{R}$. (0.5pt)

b. Etudier les branches infinies de (C_f). (0.5pt)

2. a. Etudier la continuité de f en 0. (1pt)

b. Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter géométriquement les résultats. (1 pt)

3. a. Monter que $\forall\ x \in\ ]-\infty, 0[, f'(x) = g(x)$. (0.5pt)

b. Calculer $f'(x)\ \forall\ x \in\ ]\,0, +\infty[$. (0.5pt)

c. Dresser le tableau de variation de f. (0.5pt)

4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in\ ]-1{,}3\ ;\ -1{,}2[$. (0.5pt)

b. Tracer (C_f) dans le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra $\propto = -1{,}25$. (1 pt)

<u>Partie C : Calcul approchée de l'aire d'un domaine</u>

La partie réservée pour l'aménagement des espaces verts correspond au domaine (D) délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha\ et\ x = 3$.

1. Soit F la fonction définie par $F(x) = \frac{x^2-1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$.

a. Justifier que F est une primitive de f sur $]-\infty, 0[$. (0.5pt)

b. En déduire le calcule de $\int_{\propto}^{0} f(x)\,dx$. (0.5pt)

2. A l'aide d'une intégration par partie, calculer $\int_0^3 (x+1)e^{-x}\,dx$. (0.5pt)

a. Déduire de ce qui précède que $\int_{\propto}^{3} f(x)\,dx = \frac{1-\propto^2}{2}\ln(1-\propto) + \frac{1}{4}\propto^2 - \frac{1}{2}\propto -5e^{-3} + 2$ (0.5pt)

b. En prenant $\propto = -1{,}25$ donner une valeur approchée à 10^{-2} prés de l'aire $A(D)$ de la partie réservée pour l'aménagement des espaces verts. (0.5pt)