COMPOSITION REGIONALE DU SECOND SEMESTRE 2022-2023 :

MATHEMATIQUES : Terminale S1

/ Jour 2 / Durée: 04h (08h-12h)

**Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).**

Exercice 01 (05 points)

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient les points $A(3; -2; 2)$, $B(6; 1; 5)$, $C(6; -2; -1)$, $D(0; 4; -1)$

1. Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A,B,C ne sont pas alignés. **0,5 pt**

2.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A. **0,5pt**

b) Ecrire une équation cartésienne du plan (P1) orthogonal à la droite (AC) passant par A. **0,5 pt**

c) Vérifier que le plan (P2) d'équation x+y+z-3=0 est orthogonal à la droite (AB) et passe par A . **0,75 pt**

3. Donner l'expression analytique de la projection orthogonale p sur le pan (P2). Considérons M(x,y,z) et M'(x',y',z') deux points de l'espace ; supposons M'=p(M). **0,75 pt**

4.

a) Ecrire une équation de la sphère (S) de centre B et de rayon $R = 5\sqrt{3}$. **0,25 pt**

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble L=$(S) \cap (P2)$. **0,5 pt**

5.

a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ $et \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$. En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC) . **0,75 pt**

b) Déterminer la valeur de V, volume du tétraèdre ABCD . **0,5 pt**

Exercice 02 (07,75 pts)

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A (02 ,5 pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $12x - 5y = 3$. [1pt]

2. On considère la suite de nombres complexes z_n définie par:

$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z_n \end{cases}$$

On désigne par Mn le point image de z_n dans le plan complexe d'origine O.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $= z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$. **0,75 pt**

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels Mn appartient à la demi-droite [Ox). **0,75 pt**

Partie B (2pts)

$(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère du plan. On appelle (E) la conique de foyer O de directrice (Δ), (Δ) : y = 2 et d'excentricité ½.

1. Montrer que (E) a pour équation $12X^2 + 9Y^2 = 16$ Par rapport à un repère que l'on précisera. Quelle est la nature de (E) ? **1 pts**
2. Soit ϕ l'application qui à tout point M de coordonnées x et y associe le point M' de coordonnées x' et y' tels que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

a) Donner une équation cartésienne de l'image (E') de (E) par ϕ . **01pts**

Partie C (03 pts)

Le plan étant direct, on considère un carré direct ABCD. E est le milieu de [CD], F et G sont des points tels que DEFG est aussi un carré direct.

1. Faire une figure. **0,5pt**
2. Soit s une similitude de centre D qui transforme A en B. Donner le rapport et l'angle de s. **0,5pts**
3. Déterminer s(E). **0,75 pt**
4. Soit Γ le cercle circonscrit à ABCD et I le point d'intersection des droite (AE) et (BF)

a) Calculer $mes(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})$. *en déduire que* $I \in \Gamma$. **0,75 pt**

b) Montrer que les droites (IB) et (DI) sont orthogonales . **0,5 pt.**

Problèmes (08 points)

Soit f la fonction f définit par f(x)=$\frac{1}{lnx}$; on note C sa courbe C sa courbe représentative .

1. Calculer limf(x) en $+\infty$ *et* 1^+. **(0,5pt)**
2. a) montrer que pour tout x> 1, $f'(x) = \frac{-1}{xln^2x}$. **(0,5pt)**

b) Tracer C. **(1pt)**

c) Montrer que l' équation f(x)=x admet une unique solution ∝ pour tout x> 1 et que $\propto < e$. (**0,75pt)**

Partie B

1) Soit n un entier naturel non nul ; pour tous x> 1 *on pose* $F_n(x) = \int_{\propto}^{x}(f(t)^n)dt$ *et*

$$H_n = \int_{ln\propto}^{lnx} \frac{e^t}{t^n}dt.$$

a) Montrer que H_n *est derivable sur* $]1;+\infty[$ *et calculer* $H_n{}'(x)$. (**0,75pt)**

b) En déduire que pour tout x> 1 $H_n(x) = F_n(x)$.(0,5pt)

2. On pose pour tout entier naturel non nul.

$Un = \int_{\propto}^{e}(f(t))^n\,dt.$

*a) Vérifier que pour tout entier n ≥ 1, U*n $=\int_{ln\propto}^{1}\frac{e^t}{t^n}dt$. ***(0,5pt)***

(b) En déduire que pour tout entier n ≥ 2. $\frac{\propto^n-1}{n-1} \leq$ Un $\leq \frac{e}{n-1}(\propto^n - 1)$. 0,75pt

(c) Montrer que lim $\frac{\propto^n}{n}$ en $+\infty$ est $+\infty$. *En déduire Lim de U*n en $+\infty$. ***0,75pt***

d) calculer lim de $\frac{Un}{\propto^n}$ en $+\infty$. ***0,5pt***

*6) .Pour tout entier n ≥ 1, on pose : S*n$=\sum_{k=1}^{n}(k-2)u_k$.

(a) Par une intégration par parties, montrer que : ∀n ≥ 1 $u_n = e - \propto^n + nu_{n+1}$. 0,75pt

*(b) Montrer par récurrence que pour tout n ≥ 1, S*n $=\frac{\propto^{n+1}-\propto^2}{n-\propto} + (1-n)e - u_n$. ***0,75pt***

(c) Déterminer alors $\frac{\propto^n}{S_n}$ en $+\infty$. ***0,5 pt***