**REPUBLIQUE DU SENEGAL**

Un Peuple – Un But – Une Foi

**MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE**
**INSPECTION D'ACADEMIE DE KOLDA**

**COMPOSITION REGIONALE DU SECOND SEMESTRE 2022-2023 : MATHEMATIQUES**

**Corrigé Terminales S2**

# Proposition de correction

## EXERCICE 1: (2,5 pts)

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique telle que $\begin{cases} U_0 = 4 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique telle que $\begin{cases} V_0 = \frac{\pi}{4} \\ r = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

On note $z_n \in \mathbb{C}$ tel que $|z_n| = U_n$ et $\arg(z_n) = V_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

1. a) Exprimons $U_n$ puis $V_n$ en fonction de $n$.

   $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique telle que $\begin{cases} U_0 = 4 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $U_n = U_0 q^n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc

   $U_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **(0,5 pt)**

   $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique telle que $\begin{cases} V_0 = \frac{\pi}{4} \\ r = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ donc $V_n = V_0 + nr = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$

   donc $V_n = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$ **(0,5 pt)**

   b) Déduisons en $z_n$ en fonction de $n$.

   On a $|z_n| = U_n$ et $\arg(z_n) = V_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ donc $|z_n| = 4(\frac{1}{2})^n$ et $\arg(z_n) = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   Or $z_n = |z_n|e^{i\arg(z_n)}$ donc

   $z_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)}$ ou $z_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(cos\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)\right)$ **(0,5 pt)**

2. Démontrons que $(z_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

   On a $z_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)}$ alors $z_{n+1} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}$

   $= 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4}+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}$ donc

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4}+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}}{4\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{1}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+(n+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-n\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}-n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

or $e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = i$.

D'où $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{1}{2}i$ par conséquent $(z_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^0 e^{i\left(\frac{\pi}{4}+0\right)} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ donc $z_0 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

D'où $(z_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$. **(1 pt)**

## <u>Exercice 2</u> : **(3,5 pts)**

1. Soit $P(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i\,, z \in \mathbb{C}$.

a. On a $P(2+i) = (2+i)^3 + 3(2+i)^2 - 3(2+i) - 5 - 20i$

$= 8 + 12i - 6 - i + 12 + 12i - 3 - 6 - 3i - 5 - 20i$

$= 8 - 6 + 12 - 3 - 6 - 5 + i(12 - 1 + 12 - 3 - 20)$

$= 0 + i(0)$

$P(2+i) = 0$ donc $2+i$ est une racine de $P(z)$. **(0,5 pt)**

b. Déduisons en les autres solutions de l'équation $P(z) = 0$.

$P(2+i) = 0$ alors il existe des nombres complexes $a, b\ et\ c$ tels que :

$P(z) = (z - (2+i))(az^2 + bz + c)$ avec $a \neq 0$. On a :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | -3 | -5-20i |
| 2+i | | 2+i | 9+7i | 5+20i |
| | 1 | 5+i | 6+7i | 0 |

Donc $P(z) = (z - (2+i))(z^2 + (5+i)z + 6 + 7i)$

Ainsi $P(z) = 0 \Rightarrow z = 2 + i$ et $z^2 + (5+i)z + 6 + 7i = 0$

$\Delta = (5+i)^2 - 4(1)(6+7i)$ d'où $\Delta = -18i$

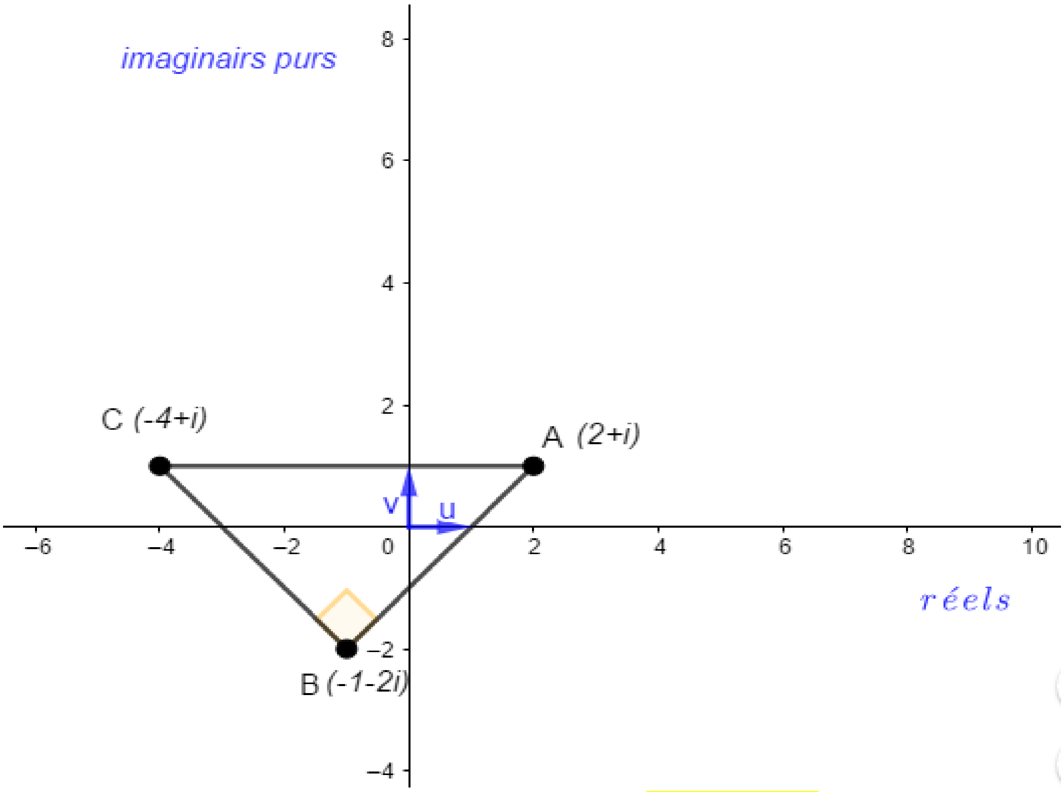
On cherche $\delta = x + iy$ telque $\delta^2 = \Delta$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Ainsi on a :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 9 \\ xy = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 3 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Alors $\delta = 3 - 3i$ ou $\delta = -3 + 3i$ donc

$z_1 = -4 + i$ et $z_2 = -1 - 2i$ d'où $S = \{2 + i; -4 + i; -1 - 2i\}$ **(1 pt)**

2. a) Plaçons les points $A(2 + i); C(-4 + i) et\ B(-1 - 2i)$ dans $(O; \vec{u}; \vec{v})$ puis calculons $AB$ et $BC$.




$AB = |z_B - z_A| = |-3 - 3i| = 3\sqrt{2}$ donc $AB = 3\sqrt{2}$ ;
$BC = |z_C - z_B| = |-3 + 3i| = 3\sqrt{2}$ donc $BC = 3\sqrt{2}$

b) On a $arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = arg\left(\frac{-3+3i}{3+3i}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

c) On a $AB = BC$ et $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $B$. **(1 pt)**

3. Soit $r$ la rotation telle que : $\begin{cases} r(A) = C \\ r(B) = B \end{cases}$

   a) Montrons que l'application $f$ associée à $r$ est définie par $f(z) = iz - 3 - i$

   $f$ est une appliction associée à une similitude donc $f(z) = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

   On a $\begin{cases} z_C = az_A + b \\ z_B = az_B + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = i$ et $b = z_B(1 - a) = -3 - i$ donc $a = i$ et $b = -3 - i$

   D'où $f(z) = iz - 3 - i$ **(0,5 pt)**

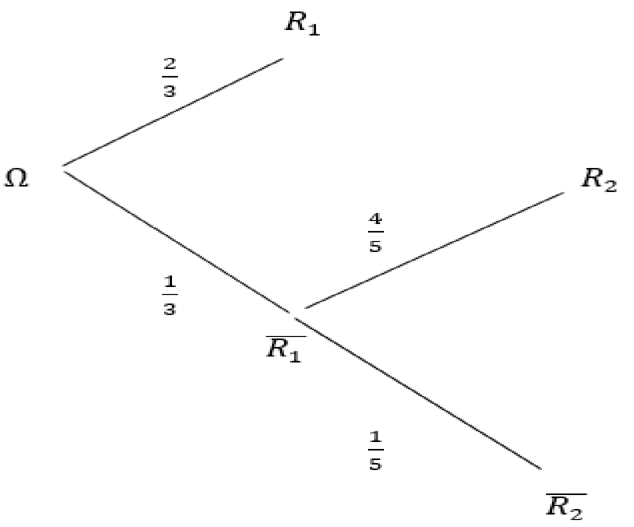
   b) Précisons les éléments caractéristiques de la transformation $r$.

   La rotation est caractérisée par son centre et son angle de rotation :

$r(\Omega;\theta)$ or $\Omega = \text{B}$ et $\theta = \arg(a) = \arg(i)$ donc $z_\Omega = -1 - 2i$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ d'où

$r(\Omega(-1-2i);\ \ \theta = \frac{\pi}{2})$. **(0,5 pt)**

**Exercice3:** **(4 pts)**




1°) a) Donnons la probabilité que le second service ne soit pas réussi sachant que le premier service n'est pas réussi.

$P(\overline{R_2}/\overline{R_1}) = \frac{1}{5}$ **(1 pt)**

b. Montrons que, sur une mise en jeu, la probabilité que ce joueur fasse une double faute est égal à $\frac{1}{15}$.

$P(\overline{R_2} \cap \overline{R_1}) = P(\overline{R_2}/\overline{R_1}) \times P(\overline{R_1}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$ $P(\overline{R_2} \cap \overline{R_1}) = \frac{1}{15}$ (**1 pt**)

c) Déduisez-en la probabilité que la mise en jeu soit réussie.

$P(R) = 1 - P(\overline{R_2} \cap \overline{R_1}) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$ $P(R) = \frac{14}{15}$ **(0,5 pt)**

2 )

a) Exprimons en fonction de $k(k \in \{0,1,2,...,10\})$ la probabilité $P_k$ que le joueur réussisse k mises en jeu.

X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ $et$ $P = \frac{14}{15}$

Donc on a $P_k = C_{10}^k \left(\frac{14}{15}\right)^k \left(\frac{1}{15}\right)^{10-k}$ avec $k \in \{0; 1; \dots \dots; 10\}$ **(0,75 pt)**

b) Calculer :$p(X = 10\,000); p(X = 9\,000); p(X = -5\,000)$.

$P(X = 10\,000) = P_{10} = C_{10}^{10}\left(\frac{14}{15}\right)^{10}\left(\frac{1}{15}\right)^{10-10} = 0{,}502$ ( Pour 10 mise en jeu il gagne $10 \times 1000 = 10\,000$)

$P(X = 9\,000) = P_9 = C_{10}^{9}\left(\frac{14}{15}\right)^{9}\left(\frac{1}{15}\right)^{10-9} = 0{,}358$ ( Pour 9 mise en jeu il gagne

$9 \times 1\,000 = 9\,000$)

$P(X = -5\,000) = 1 - (P_9 + P_{10}) = 1 - C_{10}^{10}\left(\frac{14}{15}\right)^{10}\left(\frac{1}{15}\right)^{10-10} - C_{10}^{9}\left(\frac{14}{15}\right)^{9}\left(\frac{1}{15}\right)^{10-9} = 0{,}14$

$E(X) = 7542$

$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 82\,698\,000 - 56\,881\,764 = 2\,5\,816\,236$

**Problème ( 10 points)**

*Partie A : Etude de signe d'une fonction auxiliaire.*

Soit $g$ la fonction définie par : $g(x) = \ln(1 - x) + \frac{x}{x-1}$

1. Etudions les variations de $g$ puis dresser son tableau de variations.
   a.. Domaine de définition et limites aux bornes

On a : $D_g = ]-\infty\,;1[$ ; $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$

b.. Dérivée

$\forall\, x \in D_g$ , $g$ est dérivable et $g'(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{-1}{(1-x)^2} = -\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}\right) < 0$ donc $g$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;1[$ .

c. Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g$ | $+\infty$ | $0$ | $-\infty$ |

**( 0,75 point)**

2. Calculons $g(0)$ puis déduisons-en le signe de $g$ sur $(D_g)$.
   $g(0) = 0$

Donc $\begin{cases} g(x) > 0 \;\; sur\ ]-\infty\,;0[ \\ g(x) < 0 \;\; sur\ [0;1[ \end{cases}$ **( 0,75 point)**

*__Partie B : Etude de la fonction f .__*

1. a. Justifier que $D_f = IR$. $\quad f(x) = \begin{cases} xln(1-x)+1 & si\ \ x<0 \\ (x+1)e^{-x} & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$

$f$ existe sssi $\begin{cases} 1-x>0 \\ x<0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \in IR \\ x \geq 0 \end{cases}$

$D_f = ]-\infty\ ; 0[ \cup [0; +\infty[ = IR$ **( 0,5 point)**

b. Etudier les branches infinies de $(C_f)$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xln(1-x)+1 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} ln(1-x) + \frac{1}{x} = +\infty$ donc $(C_f)$ admet une BP de direction celle de l'axe $(O, \vec{J})$ en $-\infty$ .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} + e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -(-xe^{-x}) + \frac{1}{e^x} = 0$

donc $(C_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une AH d'équation $y = 0$ **( 0,5 point)**

2. a. Continuité de f en 0.

$f(0) = 1$ , $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} xln(1-x)+1 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1)e^{-x} = 1$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$ d'où $f$ est continue en 0. **( 1 point)**

b. Dérivabilité de f en 0 et interprétation géométrique des résultats.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{xln(1-x)+1-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} ln(1-x) = 0$ d'où $f$ est dérivable à gauche de 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(x+1)e^{-x}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-x} - \left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right) = 1 - 1 = 0$ d'où $f$ est dérivable à droite de 0.

D'où $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$. D'où f est dérivable en 0

Interprétation : $(C_f)$ admet au point $A\binom{0}{1}$ une tangente d'équation $(T): y = 1$ **( 1 point)**

3. a. Monter que $\forall\ x \in\ ]-\infty, 0[, f'(x) = g(x)$.

$\forall\ x \in\ ]-\infty; 0[$ $f$ est dérivable et

$f'(x) = \ln(1-x) + x\left(\frac{-1}{1-x}\right) = \ln(1-x) + \frac{x}{x-1} = g(x)$ **( 0,5 point)**

b. $f'(x)\ \forall\ x \in\ ]\,0,+\infty[$.

$\forall\ x \in\ ]\,0,+\infty[$ $f$ est dérivable et $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x} < 0$ **( 0,5 point)**

Donc $f$ est strictement décroissante sur $]\,0,+\infty[$.

c. Le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

**( 0,5 point)**

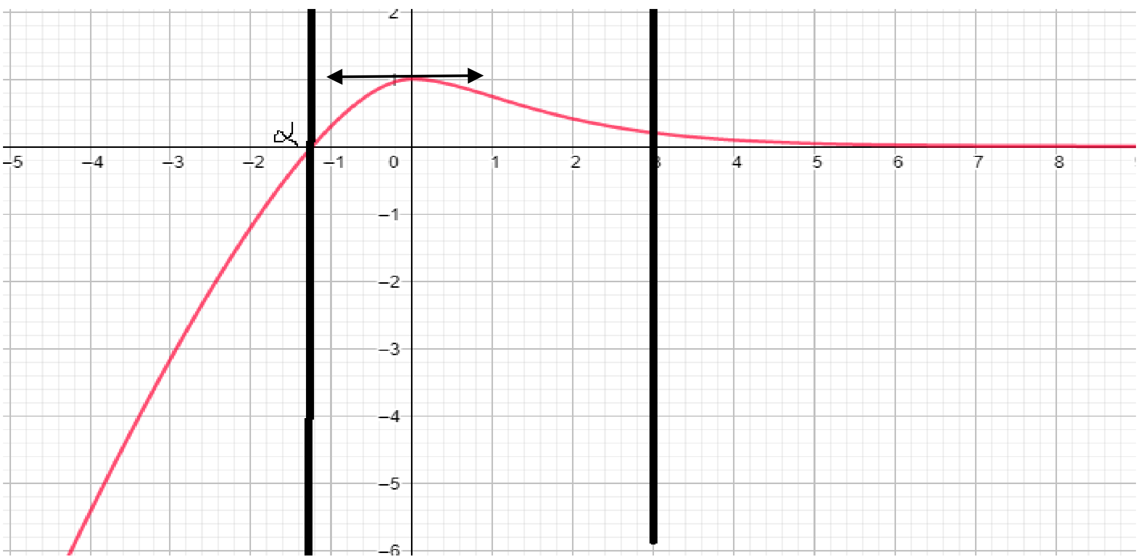
4. a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $IR$ et que $\alpha \in\ ]-1{,}3\ ;\ -1{,}2[$.

Sur $]-\infty; 0]$ $f$ est continue et strictement croissante donc bijective de $]-\infty; 0]$ vers $]-\infty; 1]$ or $0 \in\ ]-\infty; 1]$ donc $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]-\infty; 0]$ .

Sur $]0;\ +\infty[$ $f$ est continue et strictement décroissante or $\forall\ x \in\ ]0;\ +\infty[$ $f(x) \in\ ]0;\ 1[$ de plus $0 \notin\ ]0;\ 1[$ donc $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0;\ +\infty[$.

On a : $\begin{cases} f(-1{,}3) < 0 \\ f(-1{,}2) > 0 \end{cases}$ $d'ou\ -1{,}3 < \propto < -1{,}2$ **( 0,5 point)**

b. Tracer $(C_f)$ dans le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra $\propto = -1{,}25$. **( 1 point)**



*Partie C : Calcul approchée de l'aire d'un domaine*

1. Soit F une primitive de $f$ sur $]-\infty, 0[$ par $F(x) = \frac{x^2-1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$ .

a. Justifier que F est une primitive de $f$ sur $]-\infty, 0[$.

$f$ est continue sur $]-\infty\,; 0[$ et on a :

$$F'(x) = x\ln(1-x) - \left(\frac{x^2-1}{2(1-x)}\right) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x\ln(1-x) + \left(\frac{1+x}{2}\right) + \left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$F'(x) = x\ln(1-x) + \frac{1+x+1-x}{2} = x\ln(1-x) + 1 = f(x)$ sur $]-\infty, 0[$ **( 0,5 point)**

b. Le calcule de $\int_{\propto}^{0} f(x)\,dx$.

$$\int_{\propto}^{0} f(x)\,dx = [F(x)]_{\propto}^{0} = F(0) - F(\propto) = 0 - \left(\frac{\propto^2-1}{2}\ln(1-\propto) - \frac{1}{4}\propto^2 + \frac{1}{2}\propto\right)$$

$\int_{\propto}^{0} f(x)\,dx = \frac{-\propto^2+1}{2}\ln(1-\propto) + \frac{1}{4}\propto^2 - \frac{1}{2}\propto$. **( 0,5 point)**

2. A l'aide d'une intégration par partie, calculer $\int_{0}^{3}(x+1)e^{-x}\,dx$.

On pose $U' = e^{-x}\ donc\ U = -e^{-x}$ et $V = x + 1\ donc\ V' = 1$ d'où

$\int_{0}^{3}(x+1)e^{-x}\,dx = [-e^{-x}(x+1)]_{0}^{3} - \int_{0}^{3} -e^{-x}\,dx = -5e^{-3} + 2$ **( 0,5 point)**

a. Déduisons-en de ce qui précède que

$$\int_{\propto}^{3} f(x)\,dx = \frac{1-\propto^2}{2}\ln(1-\propto) + \frac{1}{4}\propto^2 - \frac{1}{2}\propto - 5e^{-3} + 2$$

On a d'après Chasle $\int_{\propto}^{3} f(x)\,dx = \int_{\propto}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx$.

$\int_{\propto}^{3} f(x)\,dx = \frac{1-\propto^2}{2}\ln(1-\propto) + \frac{1}{4}\propto^2 - \frac{1}{2}\propto - 5e^{-3} + 2$ **( 0,5 point)**

b. En prenant $\propto = -1{,}25$ donner une valeur approchée à $10^{-2}$ prés de l'aire $A(D)$ de la partie réservée pour l'aménagement des espaces verts.

$$A(D) = \left(\int_{\propto}^{3} f(x)\,dx\right) \times 4\ Cm^2$$

$$A(D) = (2(1-\propto^2)\ln(1-\propto) + \propto^2 - 2\propto - 20e^{-3} + 8)\ Cm^2$$

$A(D) = 10{,}15Cm^2$ **( 0,5 point)**

**fin**