Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique, ENSAE-Sénégal

La Junior Entreprise

Fascicule de Mathématiques

REUSSIR LE TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A

- *4 épreuves corrigées du test de présélection*

2014-2015

Avant-Propos

Le développement est une notion assez intéressante. Tout être humain, toute organisation, toute structure tend à se développer. C'est dans cet même ordre d'idées que ce document est conçu afin de permettre au futur étudiant de se développer personnellement et de réussir le test de présélection auquel ils veulent participer.

En effet, la statistique est la science qui permet de collecter, de traiter, d'analyser les données. Elle est un outil d'aide à la prise de décision. En Afrique et dans le monde, le besoin en statistiques et en statisticien se fait de plus en plus ressentir. Il existe ainsi un réseau de trois écoles de statistique en Afrique francophone et qui mettent tout à leur disposition afin de pourvoir ce manque en ressource humaine. C'est dans ce cadre qu'il lance chaque année deux concours de recrutement de nouveau élèves ingénieurs de la statistique: un concours pour les élèves ingénieurs des travaux statistiques (ITS) et un autre pour les élèves Ingénieurs Statisticiens Économistes (ISE). Dans plusieurs pays comme le Sénégal, avant de passer le concours ITS, il faut subir un test de présélection organisé par l'École Nationale de la Statistique et de l'Analyse Économique (ENSAE). A l'issu de ce test, seulement les meilleurs participeront au concours ISE.

La Junior Entreprise de cette école est une entreprise gérée par les élèves et dont un des objectifs est de participer à la formation des élèves et des futurs élèves de l'ENSAE. Donc, à travers ce document, notre objectif est de permettre aux jeunes de réussir ce test de présélection. C'est pour cette raison que nous mettons à leur disposition ce document qui comporte les énoncés des tests de présélection des années antérieurs et leur correction.

Un message à l'endroit de tout lecteur de ce document : "Vu que c'est la première fois qu'un pareille document est mis en place, il est possible qu'il comporte quelques coquille, veuillez nous faire part de vos inquiétudes, incompréhensions, ou des éventuels erreurs que vous constaterez. Nous vous en remercions à l'avance".

Remerciements

Le présent document ne verrait jamais le jour si certaines institutions et personnes n'ont pas participé. C'est pour cette raison que nous remercions :

- La République du Sénégal, pour la paix, la sécurité qu'elle procure et qui facilite la formation à l'ENSAE
- L'École Nationale de la Statistique et l'Analyse Economique pour l'environnement de travail qu'il procure
- Le Directeur de l'ENSAE, M. Bocar Toure
- Le Chef de la filière ISE, M. Mamadou Cissé, qui n'a ménagé aucun effort quant aux conseils et à la mise à notre disposition des documents importants dans la réalisation de ce document
- Les autres membres de l'administration et les enseignants de l'ENSAE
- Les membres du bureau de l'Amicale des Etudiants et Stagiaires de l'ENSAE (AES- ENSAE)
- Les membres du Conseil d'Administration de la Junior Entreprise
- M. Yves Amevoin Komlanvi et M. Abdoul Haki Maoude Kassimou pour avoir saisi ce document
- Les élèves et stagiaires de l'ENSAE et toute autre personne ayant participer de près ou de loin à la réalisation de ce document

Énoncés des épreuves

Énoncé 2008

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique 2007/2008

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A
DURÉE 3 Heures

Avertissement: le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune étant notée sur un point.
La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.

1. Calculer $\lim_{x\mapsto 0}\frac{1}{2x^2}[(1+x)^4-1-4x]$.
2. Déterminer suivant les valeurs du réel α les asymptotes de la courbe de la fonctionf_α, définie par: $f_\alpha(x)=\frac{(\alpha^2+1)x^2+\alpha^2-1}{(\alpha+1)x+\alpha-1}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+\sqrt{x+a}}=a$ où a est un réel donné et strictement positif.
4. Simplifier l'expression $B=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.
5. Calculer $\lim_{n\mapsto+\infty}2^{3n}3^{-2n} et \lim_{n\mapsto+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}2^{3k}3^{-2k}$
6. Déterminer explicitement fof pour la fonction f définie par: $f(x)=3-x,\ si\ x\in[0,1[$ et $f(x)=2-\sqrt{x-1},\ si\ x\in[1,3]$.
7. Factoriser le polynôme x^4+x^2+1 en produit de deux trinômes du second dégré.
8. Déterminer les valeurs du paramètre réel a pour lesquelles la fonction f_a telle que $f_a(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}, x\in\mathbb{R}$, admet trois extrémums.
9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $\sqrt{3x^2-11x+21}\geq 2x-3$
10. Etudier le sens de variation de la suite de terme général $u_n=\frac{2^n}{n^2}, n\geq 3$.

11. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel a, le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3ax + 1 = 0$

12. Calculer $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$.

13. Trouver le réel α tel que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$ vérifie: $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

14. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la somme des cubes des n premiers entiers naturels impairs est égale à $2n^4 - n^2$.

15. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. En déduire la partie entière du nombre réel $A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

16. Calculer $\lim_{n \mapsto +\infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n})$.

17. Déterminer le réel α pour que le polynôme $A(x) = x^4 - x + a$ soit divisible par le polynôme $B(x) = x^2 - ax + 1$.

18. Trouver les points pour lesquels la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^{2n}(x) - \cos^{2n}(x)$, admet un extrémum; n étant un entier naturel non nul fixé.

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

20. Déterminer le réel m pour que l'équation $(m-1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$ ait deux solutions x' et x'', telles que $x' < 2 < x''$.

FIN DU SUJET et BONNE CHANCE

Énoncé 2012

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (Sénégal) — *Année académique 2011/2012*

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A
DURÉE 3 Heures

Le sujet comporte vingt questions indépendantes , chacune notée sur deux points. La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.

1. Etudier la limite en *zéro* des fonctions définie par :

$$f(x) = \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^4 - x^2}; \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}; \quad k(x) = \frac{(1-x)^4 - 1 + 4x - x^3}{3x^2};$$

$$l(x) = \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation définie par

$$\frac{(-3x^2+4x+7)(5x^2+3x-2)}{(x^2-4)(-3x^2-7x+10)} \geq 0.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante: $\sqrt{\dfrac{3x^2+7x+8}{-x^3+7x^2-14x+8}} \geq 0$

4. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x}, \quad u(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^2}{x^2+3x-4}; \quad g(x) = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2;$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

5 On considère la suite (U_n) telle que $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{n}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $u_0 = 2/3$.

Calculer $s_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$ en fonction de n.

6 Montrer que si une fonction f continue sur un segment $[a,\, b]$ admet sur ce segment une fonction réciproque , f est monotone sur $[a,\, b]$.

7 Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x|^{\alpha} \sin \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

où α est un rationnel strictement positif puis la continuité de la fonction dérivée.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.

$a)$ Déterminer $a,\, b,\, c$ pour que $(\mathcal{C})$ ait les propriétés suivantes :
– $(\mathcal{C})$ passe par le point $A(0; 5)$
– la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses;
– la tangente à $(\mathcal{C})$ au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3.

$b)$ Etudier les variations de la fonction f ainsi obtenue.Tracer $(\mathcal{C})$.

9 Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

10 Déterminez quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 12 et la somme de leurs carrés est 116.

11 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m\sqrt{x^2+3} - 2mx}{x^2 - 1} & \text{si} \quad |x| \neq 1 \\ 2x^3 + px + 1 & \text{si } |x| = 1. \end{cases}$$

Déterminer m et p pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

12 Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1$

$a)$ Montrer qu'un réel $\alpha \neq 0$ est racine de $P(x)$ si et seulement si α est solution de

$$\textbf{(E)} \quad : \quad \alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0.$$

$b)$ En posant $u = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$, Résoudre l'equation **(E)** et en déduire les racines de $P(x)$.

(13) On considère l'expression $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right]$.

$a)$ Vérifier que $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \dfrac{1}{4}P_{n-2} = 0 \quad (n \in \{3,4\})$.

$b)$ On pose $u = x + \sqrt{x^2-1}, \quad v = x - \sqrt{x^2-1}$.
Calculer $(u^{n-1} + v^{n-1})(u+v)$. En déduire que,
pour tout $n \geq 3$ on a : $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \dfrac{1}{4}P_{n-2} = 0$.

(14) Soit la fraction continue x défine par $x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cdots}}}; \quad a > 0, \quad b > 0.$

$a)$ Montrer que x est solution de l'équation $bx^2 - abx - a = 0$.

$b)$ En déduire une écriture sous forme de fraction continue de x dans les cas suivants:

$(i) \qquad x = 1 + \sqrt{3} \qquad (ii) \qquad x = \dfrac{3+\sqrt{21}}{6}$

(15) Soit les nombres A et B définis par $A = \dfrac{1,0000000002}{1,0000000004}$ et $\quad B = \dfrac{0,9999999996}{0,9999999998}$.

En utilisant les fonctions $f(x) = \dfrac{1+2x}{1+4x}$ et $g(x) = \dfrac{1-4x}{1-2x}$, déterminer le signe de $A - B$.

(16) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\quad 1 + \dfrac{x+1}{x-1} + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0.$

(17) On considére P et Q deux polynômes de degrés respectifs n et q tels que pour tout $x \quad P(x)Q(x) = 0$.

$a)$ Prouver que P admet au moins $n+1$ racines ou que Q admet au moins $q+1$ racines.

$b)$ Soit $f(x) = x + |x|$ et $g(x) = x - |x|$. $f(x)$ et $g(x)$ sont elles des fonctions polynômes?

(18) Montrer par recurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$a)$ $\forall n \geq 1, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$b)$ $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

(19) Peut-on choisir m de telle sorte que le polynôme $f(x) = mx^2 + (3m-1)x + 1$ admette deux racines x' et $x"$ telles que $x' < 5 < x"$?

(20) Soit la fonction f definie sur son domaine par $f(x) = \dfrac{x^2 - ax}{x^2 - 4x + 3}$. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la fonction :

$a)$ n'admet ni maximum, ni minimum?

$b)$ admet un maximum M et un minimum m? (Démontrer alors que $M \cdot m > 0$.)

$c)$ admet seulement un minimum?

FIN DU SUJET et BONNE CHANCE

Énoncé 2013

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (Sénégal) *Année académique 2012/2013*

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A
DURÉE 3 Heures

Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points. La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.

1 Calculer la limite en *zéro* des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4 - 1 - 4x\right]; \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

2 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \ sin(x)\left[x - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right]; \quad \lim_{x \to 1}\left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{3}{x^3-1}\right).$$

avec $\mathrm{E}(x)$ désignant la partie entière de x.

3 Peut-on prolonger par continuité en zéro la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$? Justifier votre réponse.

4 Soients a et b dans $\mathbb{R}_+^*$ fixés. Calculer suivant les valeurs de a et b $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

5 $a)$ Montrer que, si $p < 0$, la fonction $f : x \longmapsto x^3 + px + q$ admet un maximum M et un minimum m.

b) Calculer le produit $M.m$ en fonction de p et q. En déduire que l'équation $x^3+px+q=0$ admet trois racines distinctes si, et seulement si $4p^3+27q^2<0$.

6 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ donné, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+\sqrt{x+a}}=a$.

7 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f_1 et f_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ par :

$$f_1(x)=1-\frac{1}{x}, \qquad \text{et} \qquad f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x)).$$

Calculer $f_{2013}(2013)$

8 On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\textbf{(E)} \qquad \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

a) Montrer que x est solution de $(\mathbf{E})$ si, et seulement si

$$(\mathbf{E}') \qquad \left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'equation $|u-2|+|u-3|=1$.

Conclure pour l'équation $(\mathbf{E})$

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^8}=0$$

10 Soit un polynôme $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ où $a_i \in \mathbb{N}\ \forall i=0,1,\ldots,n$. Montrer que 1 est racine de $B(x)=P(x)-S$, où S est la somme des coéfficients du polynôme P.
Soit l'entier N s'ecrivant sous la forme $N=a_n\,a_{n-1}\,\cdots a_2a_1a_0$. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

11 Soit la fonction f définie par $f(x)=\mathrm{E}(x)+(x-\mathrm{E}(x))^2, \quad x\in\mathbb{R}$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe de f pour $x\in[-2,\,2]$.

(12) On considére les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} |x-k| \text{ et } g(x) = f(x) + |x-4|$$

Construire les courbes de f et de g dans deux repères differents en déduire leurs extrémums.

(13) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,|x|$ est bijective. Etudier la dérivabilité de la fonction réciproque g et définir g'.

(14) Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1$

$a)$ Montrer qu'un réel $\alpha \neq 0$ est racine de $P(x)$ si et seulement si α est solution de l'équation

$$\textbf{(E'')} \quad : \quad x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

$b)$ En posant $u = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$, Résoudre l'equation **(E'')** et en déduire les racines de $P(x)$.

(15) On pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

$a)$ Déterminer les constantes réelles a, b et c telles que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$b)$ En déduire une expression simple de U_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

(16) Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x|^{\alpha} \sin\frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

où α est un rationnel strictement positif fixé puis la continuité de la fonction dérivée de f.

(17) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,on considére les fonctions f_n, $\quad g_n$ et h_n définie sur $]0,1[$ par :

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\,x^k \text{ et } h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2\,x^k.$$

$a)$ Exprimer simplement $f_n(x)$ sans le signe $\sum$

$b)$ Etablir une relation entre $g_n(x)$ et $f_n^{'}(x) \quad \forall x \in]0,1[$. En déduire les expressions simplifiées de $g_n(x)$ et de $h_n(x)$ sans le signe $\sum$.

$c)$ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x)$.

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{(-x^2+3x+4)(x^2-x-2)}{3x^2+4x-7} \leq 0$.

19 Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f telle que $f(x) = cos\left(\sqrt{x}\right)$.

20 On considère une suite arithmétique $(a_n)_{n\geq 1}$ de raison $r \neq 0$ avec $a_n > 0, \quad \forall n \geq 1$.
Prouver que :

$a)$ $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$.

$b)$ $\dfrac{1}{a_1\,a_2} + \dfrac{1}{a_2\,a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}\,a_n} = \dfrac{n-1}{a_1\,a_n}$.

FIN DU SUJET et BONNE CHANCE

Énoncé 2014

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique 2013/2014

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A DURÉE 3 Heures

Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points. La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.

1 Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-x, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x \tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}, \quad \lim_{n\mapsto+\infty} (\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}).$$

2 Montrer que pour tout réel x et y non nuls :

$$2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6 \geq 0.$$

3 Soit P et Q deux polynômes

$a)$ Montrer que si P et Q sont différents du polynôme nul, alors leur produit $P \times Q$ n'est pas le polynôme nul.

$b)$ En déduire que si le produit $P \times Q$ est le polynome nul alors P ou Q est le polynome nul. Cette propriété est-elle vérifiée par l'ensemble de fonctions numériques?

4 Determinez quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6 sachant que leur produit est 385

(5) Déterminer suivant les valeurs du réel α les asymptotes de la courbe de la fonction f_α, définie par: $f_\alpha(x) = \dfrac{(\alpha^2+1)x^2+\alpha^2-1}{(\alpha+1)x+\alpha-1}$.

(6) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ donné, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+\sqrt{x+a}} = a$.

(7) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f_1 et f_n les fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ par :

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}, \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)).$$

Calculer $f_{2014}(2014)$

(8) Simplifier l'expression $B = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

(9) Soit φ et h les fonctions définies par

$$\varphi(x) = x - \mathrm{E}(x), \text{ et } h(x) = |2x-1|,$$

et soit $f = h\, o\, \varphi$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, paire et admet 1 pour période. Représenter graphiquement f en repère normé.

(10) On considère la suite (U_n) telle que $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{n}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $U_0 = \dfrac{2}{3}$.

On pose $V_n = U_n\sqrt{2} - n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$a)$ Etudier la nature de la suite (V_n) de terme général V_n

$b)$ En deduire U_n en fonction de n et calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$.

(11) Soit la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{E}(x) + (x - \mathrm{E}(x))^2, \quad x \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe de f pour $x \in [-2,\ 2]$.

(12) Résoudre le système d'inéquations suivant

$$\begin{cases} |x^2-1| & \leq 3 \\ 2-x & < x^2. \end{cases}$$

13) Trouver le réel α tel que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$ vérifie:

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

14) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la somme des cubes des n premiers entiers naturels impairs est égale à $2n^4 - n^2$.

15) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. En déduire la partie entière du nombre réel $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=10000} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

16) Déterminer le réel α pour que le polynôme $A(x) = x^4 - x + a$ soit divisible par le polynôme $B(x) = x^2 - ax + 1$.

17) Trouver les points pour lesquels la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \sin^{2n}(x) - \cos^{2n}(x)$, admet un extrémum; n étant un entier naturel non nul fixé.

18) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

19) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-2}$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.
$a)$ Déterminer a, b, c pour que $(\mathcal{C})$ ait les propriétés suivantes :
– $(\mathcal{C})$ passe par le point $A(0;5)$
– la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses;
– la tangente à $(\mathcal{C})$ au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3.
$b)$ Etudier les variations de la fonction f ainsi obtenue.Tracer $(\mathcal{C})$.

20) Déterminer le réel m pour que l'équation $(m-1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$ ait deux solutions x' *et* x'', telles que $x' < 2 < x''$.

FIN DU SUJET et BONNE CHANCE

Correction des épreuves

Corrigé 2008

Ecole Nationale de la Statistique et
de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique 2007/2008

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A
CORRIGÉ - TYPE

1 Calculons $\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{1}{2x^2}[(1+x)^4 - 1 - 4x]$.

$$\frac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4 - 1 - 4x\right] = \frac{1}{2}\left[6 + 4x + x^2\right] \qquad \forall x \neq 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{2x^2}[(1+x)^4 - 1 - 4x] = 3}$$

2 Déterminons suivant les valeurs du réel α les asymptotes de la courbe de la fonction f_α, définie par: $f_\alpha(x) = \dfrac{(\alpha^2+1)x^2 + \alpha^2 - 1}{(\alpha+1)x + \alpha - 1}$.

- Si $\alpha = 0$ on a $f_0(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$. La courbe de f est une droite privée du point $A(1, 2)$.
- Si $\alpha = +1,\ f_1(x) = \dfrac{2x^2}{2x} = x \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$. La courbe de f est une droite privée du point origine $O(0, 0)$.
- Si $\alpha = -1,\ f_{-1}(x) = \dfrac{2x^2}{-2} = x^2$. La courbe de f est une parabole
- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$. La courbe de f admet une :
  * asymptote "verticale" d'équation $x = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} = x_\alpha$
  * asymptote "oblique" dont l'équation est obtenue par exemple par division euclidienne :

$$
\begin{array}{cccc|c}
(\alpha^2+1)X^2 & + & & \alpha^2-1 & (\alpha+1)X+\alpha-1 \\
\cline{5-5}
-((\alpha^2+1)X^2 & + & \dfrac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X) & & \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}X-\dfrac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{(\alpha+1)^2} \\
\cline{1-3}
\bullet & - & \dfrac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X \quad + & \alpha^2-1 & \\
 & - & (-\dfrac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X \quad - & \dfrac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2}) & \\
\cline{2-4}
 & & \bullet \quad + & \alpha^2-1+\dfrac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2} &
\end{array}
$$

L'équation de l'asymptote oblique est alors $y = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}x - \dfrac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{(\alpha+1)^2}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+\sqrt{x+a}} = a$ où a est un réel donné et strictement positif.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sqrt{x+\sqrt{x+a}} = a \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x+\sqrt{x+a} \geq 0 \\ x+\sqrt{x+a} = a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x+\sqrt{x+a} = a^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x+a = (a^2-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+a \geq 0 \\ x^2-(2a^2+1)x-a+a^4 = 0 \end{cases}$$

$\Delta = (2a^2+1)^2 + 4a - 4a^4 = (2a+1)^2 \geq 0$
$x_1 = a^2+a+1$ et $x_2 = a^2-a$.

a^2+a+1 ne vérifie pas l'équation. Donc cette équation a une solution unique : a^2-a

4) Simplifions l'expression $B = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.
On cherche à mettre $20+14\sqrt{2}$ sous la forme $(a+b\sqrt{2})^2$. Par développement, et identification on a $a=2$, $b=1$

$B = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4.$ $\boxed{B=4}$

5) Calculons $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2^{3n}3^{-2n} et \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \sum\limits_{k=0}^{k=n} 2^{3k}3^{-2k}$

$2^{3n}3^{-2n} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{3n}3^{-2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{8}{9}\right)^n = \boxed{0}$. Car $0 \leq \dfrac{8}{9} < 1$

$$\sum_{k=0}^{k=n} 2^{3k}3^{-2k} = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{8}{9}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{8}{9}\right)}$$ (Somme des $(n+1)$ premier termes d'une suite géométrique de raison $q = \frac{8}{9}$ et de premier terme 1).

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} 2^{3k}3^{-2k} = \frac{1}{1-\frac{8}{9}} = 9}.$$

⑥ Déterminons explicitement fof pour la fonction f définie par:

$$\begin{cases} f(x) = 3-x, & si \quad x \in [0,1[\\ f(x) = 2-\sqrt{x-1} & si \quad x \in [1,3] \end{cases}$$

- si $0 \leq x \leq 1$ on a $-1 \leq -x \leq 0$ et $2 \leq 3-x \leq 3$. Donc $3-x \in [1,3]$.

  Ainsi, $fof(x) = f[f(x)] = 2-\sqrt{f(x)-1} = 2-\sqrt{3-x-1} = 2-\sqrt{2-x}$.
- si $1 \leq x \leq 2$ on a $0 \leq x-1 \leq 1$ et $-1 \leq -\sqrt{x-1} \leq 0$. Donc $1 \leq 2-\sqrt{x-1} \leq 2$ et donc $f(x) \in [1,3]$.

  Ainsi, $fof(x) = f[f(x)] = 2-\sqrt{f(x)-1} = 2-\sqrt{1-\sqrt{x-1}}$.
- si $2 \leq x \leq 3$ on a $1 \leq x-1 \leq 2$ et $-\sqrt{2} \leq -\sqrt{x-1} \leq -1$. Donc $2-\sqrt{2} \leq 2-\sqrt{x-1} \leq 1$ et donc $f(x) \in [0,1]$.

  Ainsi, $fof(x) = f[f(x)] = 3-f(x) = 1+\sqrt{x-1}$.

  <u>Conclusion :</u> $\boxed{fof(x) = \begin{cases} 2-\sqrt{2-x} & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2-\sqrt{1-\sqrt{x-1}} & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 1+\sqrt{x-1} & si \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}}$

⑦ Factorisons le polynôme x^4+x^2+1 en produit de deux trinômes du second degré.

$$x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

⑧ Déterminons les valeurs du paramètre réel a pour lesquelles la fonction f_a telle que

$f_a(x) = \dfrac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$, admet trois extrémums.

f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_a'(x) = \dfrac{(2x+a)\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x(x^2+ax+5)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

$$f_a'(x) = \frac{(2x+a)(x^2+1) - x(x^2+ax+5)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{2x^3+2x+ax^2+a+a-x^3-ax^2-5x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f_a'(x) = \frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Etudions le signe de $\varphi_a(x) = x^3 - 3x + a$.

$\varphi_a'(x) = 3x^2 - 3.$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
φ_a'		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ_a	$-\infty$	$\nearrow$	$2+a$	$\searrow$	$a-2$	$\nearrow$	$+\infty$

f_a admet trois extrémum si $(2+a)(a-2) < 0$ avec $2+a > 0$ et $a-2 < 0$.

En d'autres termes $\boxed{-2 < a < 2}$

9 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $\sqrt{3x^2-11x+21} \geq 2x-3$

- si $2x-3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3/2$ alors les solutions sont les éléments de l'intervalle $\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$
- si $2x-3 \geq 0$, on élève au carré les deux nombres. On a :

  $3x^2-11x+21 \geq 4x^2-11+9 \Longrightarrow x^2-x-12 \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} -3 \leq x \leq 4 \\ x \geq 3/2 \end{array}$

  <u>Conclusion :</u> L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc

  $S = \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}, 4\right] = \boxed{]-\infty, 4]}$

(10) Etudier le sens de variation de la suite de terme général $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}, n \geq 3$.

On remarque que $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{2n^2 - n^2 - 2n - 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 - 2n - 1}{(n+1)^2}$$

Or le trinôme du second degré $c^2 - 2x - 1$ a pour discriminant réduit $\Delta' = 2$ et pour racine $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$. Donc si $x > 1 + \sqrt{2}$ alors $x^2 - 2x - 1 > 0$.

Comme $n \geq 3 > 1 + \sqrt{2}$ alors $n^2 - 2n - 1 > 0 \quad \forall\ n \geq 3$.

Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall\ n \in \mathbb{N} \quad et \quad n \geq 3$.

Par suite, la suite (u_n) est strictement croissante.

- Déterminons, suivant les valeurs du paramètre réel a, le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3ax + 1 = 0$

  Posons $\varphi_a(x) = x^3 - 3ax + 1$.

  On a $\varphi'_a(x) = 3x^2 - 3a$

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		$\sqrt{a}$		$+\infty$
φ'_a		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ_a	$-\infty$	$\nearrow$	$1 + 2a\sqrt{a}$	$\searrow$	$1 - 2a\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

(*) Cas où $a \geq 0$

$*$ si $\begin{cases} (1 + 2a\sqrt{a})(1 - 2a\sqrt{a}) < 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 - 4a^3 < 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$ ou encore $a \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$,

alors l'équation admet 3 solutions

$*$ si $\begin{cases} (1 + 2a\sqrt{a}) > 0 \\ (1 - 2a\sqrt{a}) > 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$ si $0 \leq a \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, il y a 1 seule solutions

(*) Cas où $a < 0$

On a $\varphi'_a > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Donc φ_a est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. L'équation $\varphi_a(x) = 0$ admet une seule solution réelle.

(12) Calculons $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$.

$$\frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n} = \frac{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right]}{5^n\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right]} = \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$. Car $\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{3}{4}$ sont compris entre 0 et 1.

On déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n} = 0}$

(13) Trouvons le réel α tel que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}, x \in \mathbb{R}$ vérifie:
$(1 + x^2)f''(x) + xf'(x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
f est dérivable. Posons $U(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$

$$f'(x) = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} = \frac{U'(x)}{2f(x)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{U''(x)\sqrt{U(x)} - \dfrac{(U'(x))^2}{2\sqrt{U(x)}}}{U(x)} = \frac{1}{4\,U(x)\sqrt{U(x)}}[2U''(x)U(x) - (U'(x))^2]$$

.

$$(1 + x^2)f''(x) = \frac{(1 + x^2)}{4\,U(x)f(x)}\left[\frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}(\sqrt{1 + x^2} - 2x^2\sqrt{1 + x^2} - 2x^3)\right]$$

et $xf'(x) = \dfrac{x(x + \sqrt{1 + x^2})}{2\,f(x)\sqrt{1 + x^2}}$. Posons :$A = (1 + x^2)f''(x) + xf'(x)$

$$A = \frac{(1 + x^2)}{4\,U(x)f(x)}\left[\frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}(\sqrt{1 + x^2} - 2x^2\sqrt{1 + x^2} - 2x^3)\right] + \frac{x(x + \sqrt{1 + x^2})}{2\,f(x)\sqrt{1 + x^2}}$$

.

$$= \frac{1}{4\,U(x)f(x)\sqrt{1 + x^2}}[\sqrt{1 + x^2} - 2x^2\sqrt{1 + x^2} - 2x^3 + 2x(2x^2 + 2x\sqrt{1 + x^2} + 1)]$$

$$= \frac{1}{4\,U(x)f(x)\sqrt{1+x^2}}[\sqrt{1+x^2}+2x^2\sqrt{1+x^2}+2x^3+2x] = \frac{1+2x^2+2x\sqrt{1+x^2}}{4\,U(x)f(x)}$$

$$= \frac{1}{4\,U(x)f(x)}U^2(x) = \frac{U(x)}{4\,f(x)} = \frac{1}{4}f(x)$$

D'où $\alpha = \dfrac{1}{4}$

14) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la somme des cubes des n premiers entiers naturels impairs est égale à $2n^4 - n^2$.

Soit $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$. Montrons que $S_n = 2n^4 - n^2$

Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $2 \times 1^4 - 1^2 = 2 - 1 = 1$. Donc la relation est vraie au rang 1.

Supposons qu'elle est vraie au rang n et montrons qu'elle l'est aussi au rang $n+1$.

$$S_{n+1} = 1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3+(2n+1)^3 = S_n+(2n+1)^3 = 2n^4-n^2+(2n+1)^3$$

$$= 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(n^4 + 6n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - (n^2 + 2n + 1)$$
$$= 2(n+1)^4 - (n+1)^2.$$

Donc $S_{n+1} = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$

15) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

Comme $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ alors $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$.

Ainsi $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ or $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Donc $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

De même, on montre que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

Par suite $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

Déduisons-en la partie entière du nombre réel $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

D'après ce qui précède, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=10000} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < A < \sum_{k=1}^{k=10000} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

Donc $\sqrt{10001}-1<A<\sqrt{10000}$.

Ainsi, $99<\sqrt{10001}-1<A<100$. D'où $E(A)=99$

(16) Calculons $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n})$.

$$\lim_{n\mapsto+\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n})=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

(17) Déterminons le réel α pour que le polynôme $A(x)=x^4-x+a$ soit divisible par le polynôme $B(x)=x^2-ax+1$.

Faisons une division euclidienne.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
x^4 & & & & & - & x & + & a & x^2-ax+1 \\
\cline{10-10}
-(x^4 & - & ax^3 & + & x^2) & & & & & x^2+ax+(a^2-1) \\
\cline{1-5}
\bullet & & ax^3 & - & x^2 & - & x & + & a & \\
& - & (x^3 & - & a^2x^2 & + & ax) & & & \\
\cline{3-7}
& & \bullet & & (a^2-1)x^2 & - & (a+1)x & + & a & \\
& & & - & ((a^2-1)x^2 & - & a(a^2-1)x & + & (a^2-1)) & \\
\cline{5-9}
& & & & \bullet & & (a^3-2a-1)x & - & (a^2-a-1) &
\end{array}$$

$A(x)$ divisible par $B(x)$ si et seulement si $\begin{cases} a^3-2a-1=0 \\ a^2-a-1=0 \end{cases}$

$a^2-a-1=0$. $\Delta=1+4=5 \quad a_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \quad a_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aucune des solutions de $a^2-a-1=0$ n'est solution de $a^3-2a-1=0$.

Donc $B(x)$ ne divise pas $A(x)\,\forall\,a$

(18) Trouvons les points pour lesquels la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^{2n}(x)-\cos^{2n}(x)$, admet un extrémum; n étant un entier naturel non nul fixé.

$$f'(x)=2n\cos x\sin x[\sin^{2n-2}(x)+\cos^{2n-2}(x)]=4n\sin(2x)[\sin^{2n-2}(x)+\cos^{2n-2}(x)]$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$x_k = \frac{1}{2}k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$

f s'annule en x_k en changeant de signe. Donc les points cherchés sont $\boxed{x_k = \frac{1}{2}k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$.

19 Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

On peut le faire par deux méthodes :

1^{ere} méthode : Développement de $a^n - b^n$.

Pour $n = 0, 1 - 1 = 0$. 0 divise 7.

Pour $n = 1, 3^2 - 2 = 7$. 7 divise 7.

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k} \quad \forall n \geq 1$$

. Donc $3^{2n} - 2^n = 9^n - 2^n = (9-2)\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 9^{n-1-k} = 7\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 9^{n-1-k}$.

On voit clairement que 7 divise $3^{2n} - 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2^{eme} méthode : Par récurrence.

Pour $n = 0, 1 - 1 = 0$. 0 divise 7.

Pour $n = 1, 3^2 - 2 = 7$. 7 divise 7.

Supposons que 7 divise $3^{2n} - 2^n$ pour un certain rang n et montrons que la relation est valable au rang $n + 1$.

$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2 = 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = (7+2) \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = 7(3^{2n}) - 2 \times (3^{2n} - 2^n)$

– Par hypothèse de récurrence, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

  Donc $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 7.3^{2n} + 2 \times 7.\alpha_n = 7(3^{2n} + 2\alpha_n)$

  Donc 7 divise $3^{2n} - 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

20 Déterminons le réel m pour que l'équation $(m-1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$ ait deux solutions x' *et* x'', telles que $x' < 2 < x''$.

Pour $m = 1$, l'équation devient une équation du premier degré et admet une solution unique.

Pour $m \neq 1$, Calculons le discriminant :

$\Delta = m^2 - 4(3m+1)(m-1) = m^2 - 12m^2 + 12m - 4m + 4 = -11m^2 + 8m + 4$

$\delta' = 16 + 44 = 60 = (2\sqrt{15})^2 \quad , \quad m_1 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{15}}{11} \quad , \quad m_1 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{15}}{11}$

m	$-\infty$ m_1 m_2 $+\infty$
Δ	$-$ 0 $+$ 0 $-$

Comme nous cherchons des valeurs de m pour lesquelles l'équation a deux solutions alors $m \in]m_1, m_2[$.

Et dans ce cas, on a $x' = \dfrac{m - \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)}$ et $x'' = \dfrac{m + \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)}$.

$$\begin{aligned}
x' < 2 < x'' &\iff \frac{m - \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)} < 2 < \frac{m + \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)} \\
&\iff m - \sqrt{-11m^2 + 8m + 4} < 4(m-1) < m + \sqrt{-11m^2 + 8m + 4} \\
&\iff \sqrt{-11m^2 + 8m + 4} < 3m - 4 < \sqrt{-11m^2 + 8m + 4} \\
&\iff |3m - 4| < \sqrt{-11m^2 + 8m + 4} \Leftrightarrow (3m-1)^2 < -11m^2 + 8m + 4 \\
&\iff 9m^2 - 24m + 16 < -11m^2 + 8m + 4 \Leftrightarrow 20m^2 - 32m + 12 < 0 \\
&\iff 5m^2 - 8m + 3 < 0.
\end{aligned}$$

On a : $\Delta' = 16 - 15 = 1$. Et $m' = \dfrac{4-1}{5} = \dfrac{3}{5}$ et $m'' = \dfrac{4+1}{5} = 1$

m	$-\infty$ $3/5$ 1 $+\infty$
$5m^2 - 8m + 3$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

Donc $5m^2 - 8m + 3 < 0$ si $m \in \left]\dfrac{3}{5}, 1\right[$.

Comme $\left]\dfrac{3}{5}, 1\right[\subset]m_1, m_2[$ alors l'ensemble recherché est $\left]\dfrac{3}{5}, 1\right[$.

D'où $\forall\, m \in \left]\dfrac{3}{5}, 1\right[$, l'équation $(m-1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$ admet deux solutions x' *et* x'', telles que $x' < 2 < x''$.

FIN DU CORRIGÉ-TYPE

Corrigé 2012

Ecole Nationale de la Statistique et
de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique 2011/2012

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A
CORRIGÉ - TYPE

1. **Limites:**
   - $f(x) = \frac{(1-\cos x)}{x^4-x^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1-\cos x)}{x^4-x^2} \\ &= \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}(1+2x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2(4x^2-4)} \end{aligned}$$

comme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on a :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$$

   - $g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. Posons $y^6 = 1+x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} \\ &= \lim y \to 1 \frac{y^2+y+1}{y+1} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{3}{2}$$

.

- $k(x) = \frac{(1-x)^4 - 1 + 4x - x^3}{3x^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} k(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^4 - 1 + 4x - x^3}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x^4 - 7x^3 + 6x}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}(x^2 - 7x + 6) \\
&= \frac{6}{3} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} k(x) = 2$$

- $l(x) = \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

$$\begin{aligned}
l(x) &= \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} \\
&= \frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})} \\
&= \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2(1+\sqrt{\cos x})} \\
&= 2\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) \frac{1}{4(1+\sqrt{\cos x})} \text{ d'où}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} l(x) = \frac{1}{4}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\dfrac{(-3x^2+4x+7)(5x^2+3x-2)}{(x^2-4)(3x^2-7x+10)} \geq 0$. Cette fraction est définie dans $\mathbb{R} - \{-2, -\frac{10}{3}, 1, 2\}$. Posons $A(x) = -3x^2 + 4x + 7$, $B(x) = 5x^2 + 3x - 2$, $C(x) = x^2 - 4$, $D(x)0 = -3x^2 - 7x + 10$. On alors le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{10}{3}$		-2		-1		$\frac{2}{5}$		1		2		$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$A(x)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$B(x)$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$C(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$+$
$D(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$
	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

Ainsi, $S =]-\infty, \frac{-10}{3}[\cup]-2, \frac{2}{5}] \cup]1, 2[\cup [\frac{7}{3}, +\infty[$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$I(x) = \sqrt{\frac{3x^2+7x+8}{-x^3+7x^2-14x+8}} \geq 0$$

.

L'ensemble solution est le domaine de définition de $I(x)$ car une racine est toujours positive. Le numérateur de la fraction dans la racine est toujours positif, car le polynôme correspondant a un discriminant $\Delta = -37$. 1 est racine du dénominateur et $-x^3+7x^2-14x+8 = (x-1)(-x^2+6x-8)$. On a ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	1		2		4	$+\infty$
$-x^2+6x-8$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$I(x)$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$

Ainsi, $S =]-\infty, 1[\cup]2, 4[$

4. Calcul des fonctions dérivées:

- $f(x) = \frac{2x^3-3x+\sqrt{x}-1}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x^2-3+\frac{1}{2\sqrt{x}})x - 2x^3+3x-\sqrt{x}+1}{x^2} \\ &= \frac{6x^3-3x+\frac{\sqrt{x}}{2}-2x^3+3x-\sqrt{x}+1}{x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) = \dfrac{4x^3-\frac{\sqrt{x}}{2}+1}{x^2}$

- $u(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^2}{x^2+3x-4}$

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{[2(x+1)(x+2)^2+2(x+2)(x+1)^2](x^2+3x-4)}{(x^2+3x-4)^2} - \frac{(2x+3)(x+1)^2(x+2)^2}{(x^2+3x-4)^2} \\ &= \frac{(x+1)(x+2)}{(x^2+3x-4)^2}[(4x+6)(x^2+3x-4)-(2x+3)(x+1)(x+2)] \\ &= \frac{(x+1)(x+2)(2x+3)}{(x^2+3x-4)^2}[2x^2+6x-8-x^2-3x-2] \end{aligned}$$

D'où $u'(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)(2x+3)(x^2+3x-10)}{(x^2+3x-4)^2}$

- $g(x) = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{-2(x-1)}{(x+2)^3} \end{aligned}$$

  Ainsi, $g'(x) = \dfrac{-2(x-1)}{(x+2)^3}$

- $h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

$$h'(x) = \left(\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

  d'où $h'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

5. Soit la suite (U_n) définie par la relation de recurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ où $u_0 = \frac{2}{3}$. Calcul de la somme des n premiers termes:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}u_{n+1} &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} + \frac{n}{2} + 1 \\ \sqrt{x}un + 1 - (n+1) &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} + \frac{n+2-2n-2}{2} \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{2} \\ \sqrt{2}u_{n+1} - (n+1) &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}u_n - n). \end{aligned}$$

Ainsi, si on définit $v_n = \sqrt{2}u_n - n$ avec $v_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, alors v_n serait une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donc $u_n = \frac{v_n+n}{\sqrt{2}}$. On a donc:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} u_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{i=0}^{n} v_i + \sum_{i=0}^{n} i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + \frac{n(n+1)}{2}] \end{aligned}$$

d'où $s_n = \frac{4}{3}(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}) + \frac{\sqrt{2}}{4}(n+1)$

6. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Puisque f est injective, $f(a) \neq f(b)$. Supposons que $f(a) < f(b)$. Soit $x \in]a, b[$. Si $f(x) \leq f(a)$, l'image de l'intervalle $[x, b]$ par la fonction continue f est un intervalle contenant $[f(x), f(b)]$, donc contenant $[f(a), f(b)]$. $f(a)$ a donc un antécédant α dans $[x, b]$ et on a alors $a \neq \alpha$ et $f(\alpha) = f(a)$, ce qui est contraire au fait que f soit injective. Ainsi, on n'a pas $f(x) \leq f(a)$ et donc forcément $f(x) > f(a)$. Un même raisonnement permet de voir qu'on n'a pas $f(x) \geq f(b)$.

   Soient maintenant x et y deux éléments de $[a, b]$ tels que $a < x < y < b$. En appliquant le même principe que précédemment aux segments $[a, x]$ à y (resp. $[y, b]$ à x), on obtient $f(x) < f(y) < f(b)$. f est donc monotone. On utilise un même principe lorsque $f(a) > f(b)$.

7. Dérivabilité de la fonction par

$$f(x) = |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

   où α est un rationnel strictement positif.

   On remarque que f est impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x > 0,\ |f(x)| \leq |x|^\alpha \text{ car } |\sin \frac{1}{x}| \leq 1\ \forall x > 0.$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \text{ et } f \text{ est continue en } 0.$$

   Etudions la dérivabilité en 0. Posons $\phi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$. Ainsi, $\phi(x) = x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}$. ϕ n'a donc pas de limite en 0 quand $0 < \alpha \leq 1$ et que si $\alpha > 1$, $\lim_{x \to 0} \phi(x) = 0$. Etudions la dérivée:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} \\ &= x^{\alpha-2}[\alpha x - \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}]. \end{aligned}$$

   On en déduit que si $\alpha \geq 2$, f' n'a pas de limite en 0. En conclusion:

   - $0 < \alpha \leq 1$: f est dérivable sur chaque segment de $\mathbb{R}^*$
   - $1 < \alpha \leq 2$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est continue sur $\mathbb{R}$.
   - $\alpha > 2$: f est dérivable de dérivée continue sur $\mathbb{R}^*$

8. Soit f définie sur $\mathbb{R} - 2$ par

$$f(x) = \frac{ax^2 bx + c}{x - 2}$$

a. La courbe $(\mathcal{C})$ passe par $A(0,5)$ i.e $f(o) = 5$ donc $\frac{c}{2} = 5$ et donc $c = -10$.

b. La tangente au point A est parallèle à l'axe des abscisses; donc

$$\begin{aligned}\frac{(2ax_0 + b)(x_0 - 2) - ax_0^2 + bx_0 - c}{(x-2)^2} &= 0 \text{ avec } x_0 = 0\\ -2b - c &= 0\\ b &= -\frac{c}{2}\\ b &= 5\end{aligned}$$

c. tangente au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 3:

$$\begin{aligned}f'(1) &= 3\\ \frac{(2a+b)(1+2) - a - b - c}{(1-2)^2} &= -3\\ -2a - b - a - b - c &= -3\\ -3a - 2b - c &= -3\\ -3a &= -3\\ a &= 1\end{aligned}$$

En conclusion, $f(x) = \frac{x^2+5x-10}{x-2}$ et la droite d'équation $y = x+7$ est une asymptote de f. Représentation graphique de f:

9. Calculons $\sum_{i=1} +\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ Pour cela, posons:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

En procédant par identification, on a: $A = C = \frac{1}{2}$, et $B = -1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1} 100 \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i+2}\\ &= \text{....(Une erreur se trouve dans les calculs je retraite).}\end{aligned}$$

10. Soit (U_n) une suite arithmétique de raison a: $u_n = u_0 + na$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} &=& 12\\ u_n^2 + u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + u_{n+3}^2 &=& 116\end{array}\right.$$

En introduisant le terme général de la suite on a:

$$\begin{cases} 4u_0 + 4na + 6a & = & 12 \\ 4u_0^2 + 8na + \sum_{i=n}^{n+3} i^2 & = & 116 \end{cases}$$

Ce système admet deux solutions pour a: $a = 4$ et $a = -4$.

- Si $a = 4$, les quatre termes de la suite sont -3, 1, 5, 9.
- Si $a = -4$, les termes consécutifs de la suite sont 9, 5, 1, -3.

11. Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m\sqrt{x^2+3} - 2mx}{x^2-1} & si \quad |x| \neq 1 \\ 2x^3 + px + 1 & si \quad |x| = 1 \end{cases}$$

Les points d'étude de la fonction sont 1 et -1. Pour $|x| \neq 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{m\sqrt{x^2+3} - 2mx}{x^2-1} \\ &= \frac{m(x^2+3-(2x)^2)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\ &= \frac{m(-3x^2+3)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\ &= \frac{-3m}{\sqrt{x^2+3}+2x} \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-3m}{4}$. Si f est continue en 1, alors $\frac{-3m}{4} = 3 + p$, soit $3m + 4p = -12$. De même de (il me semble aussi qu'il y a une erreur. Je vais relever.)

12. Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 1$. 0 n'est pas racine de P car $P(0) = 1$. Soit $\alpha \neq 0$

a.

$$\begin{aligned} P(\alpha) = 0 &\Longleftrightarrow \alpha^4 - \alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha^2(\alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}) = 0 \text{ et puisque } \alpha \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0 \end{aligned}$$

b. Posons $u = \alpha + \frac{1}{\alpha}$. Puisque $(\alpha + \frac{1}{\alpha})^2 = \alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2}$, on en déduit que $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = u^2 - 2$. Dès lors, l'équation (E) devient:

$$u^2 - u - 6 = 0$$

Cette équation admet -2 et 3 comme solution. On a alors les deux équations suivantes, permettant de déterminer α: $\alpha + \frac{1}{\alpha} = -2$ et $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$. En conlusion, l'ensemble solution S de (E) est

$$S = \{1, x_1, x_2\} \text{ où } x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

13. $P_n(x) = \frac{1}{2^n}\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n\right]$

a. La vérification de l'équation donnée est immédiate.

b. On pose $u = x + \sqrt{x^2 - 1}$, $v = x - \sqrt{x^2 - 1}$. On remarque que : $u.v = 1$ et $u + v = 2x$.

$$\begin{aligned}(u^{n-1} + v^{n-1})(u + v) &= u^n + u^{n-1}v + v^{n-1}u + v^{n-1}u + v^{n-2} \\ &= u^n + v^n + u^{n-2} + v^{n-2}\end{aligned}$$

On remarque que $P_n(x) = \frac{1}{2^n}(u^n + v^n)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2} &= \frac{1}{2^n}[u^n + v^n - 2xu^{n-1} - 2xv^{n-1} + u^{n-2} + v^{n-2}] \\ &= \frac{1}{2^n}\left[(u^{n-1} + v^{n-1})(u + v) - 2x(u^{n-1} + v^{n-1})\right] \\ &= \frac{1}{2^n}\left[(u^{n-1} + v^{n-1})(u + v - 2x)\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

14. Soit la fraction continue définie par $x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \dots}}}$; $a > 0$, $b > 0$.

a.

$$\begin{aligned}x &= a + \frac{1}{b + \frac{1}{x}} \\ &= a + \frac{x}{xb + 1} \qquad = \frac{axb + a + x}{1 + xb}\end{aligned}$$

On en déduit que x est solution de l'équation suivante:

$$bx^2 - abx - a = 0$$

b. Après résolution de l'équation précédente ($a > 0$ et $b > 0$), on obtient deux solutions dont la solution positive est la suivante:

$x = \frac{ab+\sqrt{(ab)^2+4ab}}{2a}$, soit $x = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{(ab)^2+4ab}}{2a}$.

- Pour $x = 1 + \sqrt{3}$, par identification, on a $\frac{b}{2} = 1$, $b = 2$ et $a = 1$, $x = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\dots}}}$
- Pour $x = \frac{3+\sqrt{21}}{6}$, par identification, $b = 1$ et $a = 3$. $x = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\dots}}}$

15. Soit

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= \frac{(1+2x)(1-2x) - (1-4x)(1+4x)}{(1-2x)(1+4x)} \\
&= \frac{1 - 4x^2 + 1 + 16x^2}{(1-2x)(1+4x)} \\
&= \frac{12x^2}{(1-2x)(1+4x)}
\end{aligned}$$

$f(x) - g(x)$ est donc du signe de $(1-2x)(1+4x)$ résumé dans le tableau suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$1-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$1+4x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)-g(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$

$f - g > 0$ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$. Et puisque, $A = f(10^{-9})$ et $B = g(10^{-9}$ et que $10^{-9} \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$, on conclut que $A - B > 0$.

16. Résolution de l'équation $+\dfrac{x+1}{x-1} + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0$. Posons $Y = \frac{x+1}{x-1}$. L'équation à résoudre devient $1 + Y + Y^2 + Y^3 = 0$. Le membre de gauche de l'équation est la somme des 4 premiers termes d'une suite géométrique de raison Y. Ainsi, l'équation devient:

$$\frac{1-Y^4}{1-Y} = 0, \text{ avec } Y \neq 1 \ .$$

Comme 1 n'est pas solution de l'équation en Y, on a: $Y^4 = 1$, $Y = -1$. En remplaçant Y par sa valeur, on obient $x = 0$. 0 est donc la seule solution de l'équation.

17. a. Soient P et Q deux polynômes de degrés n et q tels que $PQ = 0$. Soient $\{x_1, \ldots, x_n\}$ les racines de P et $\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+q}\}$ les racines de Q. Puisque $PQ = 0$, si x_{n+q+1} est un réel différent des racines de P et Q,on a $P(x_{n+q+1})Q(x_{n+q+1}) = 0$, soit $P(x_{n+q+1}) = 0$ ou $Q(x_{n+q+1}) = 0$. P admet donc au moins $(n+1)$ racines ou Q admet au moins $q+1$ racines. Tout polynôme admettant un nombre de racine supérieur à son degré est forcément nul. On peut donc en dire que $P = 0$ ou $Q = 0$.

    b. $f(x) = x + |x|$ et $g(x) = x - |x|$. On remarque que $f.g = x^2 - |x|^2$, soit $fg = 0$. D'après a. si P et Q sont deux polynômes tels que $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$. Comme f et g sont tous non nuls, f et g ne sont pas des fonctions polynômes.

18. Prouvons les propriétés par récurrence.

    a. $\forall n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ Soit P_n la propriété $\forall n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

vérification : Pour $n = 1$, $\frac{n^2(1+n)^2}{4} = 1$.

hypothèse : supposons P_n vraie; Prouvons P_{n+1}

hérédité :

$$
\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{2} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}
$$

    b. $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11. Soit Q_n la propriété correspondante

vérification pour $n = 0$, $3^2 + 2 = 11$ qui est divisible par 11.

hypothèses supposons Q_n vraie, prouvons Q_{n+1}

hérédité Soit $A = 3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1}$

$A = 3^{2n+2} \times 3^2 + 2^{6n+1} \times 2^6$ Puisque $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11,

$$
\begin{aligned}
A &= (11k - 2^{6n+1})3^2 + 2^{6n+1} \times 2^6 \\
&= 9 \times 11k - 2^{6n+1}(2^6 - 3^2) \\
&= 11 \times 9k - 5 \times 11 \times 2^{6n+1} \\
&= 11(9k - 5 \times 2^{6n+1})
\end{aligned}
$$

19. Existe-il m de telle sorte que le polynômes $f(x) = mx^2 + (3m-1)x + 1$ admette deux racines x' et x'' telles que $x' < 5 < x''$? Pour cela, il faut que:

   - $m \neq 0$
   - le discriminant du polynôme correspondant Δ doit être positif
   - les deux racines x_1 et x_2 du polynôme ($x_1 < x_2$) vérifient $x_1 < 5 < x_2$.

   On a ainsi:

$$\begin{aligned}\Delta &= (3m-1)^2 - 4m \\ &= 9m^2 - 6m + 1 - 4m \\ &= 9m^2 - 10m + 1\end{aligned}$$

   $\Delta \geq 0$ si $m \in]-\infty, \frac{1}{9}] \cup [1, +\infty[$. Les solutions de $f(x) = 0$ sont dans ce cas

$$x_1 = \frac{-3m + 1 - \sqrt{\Delta}}{2m} \text{ et } x_2 = \frac{-3m + 1 + \sqrt{\Delta}}{2m}$$

   .

   Deux cas sont donc à distinguer:

   - Pour $m \in]0, \frac{1}{9}] \in [1, +\infty[$, on résoud le système d'inéquations suivant:

$$\begin{cases} -3m + 1 - \sqrt{9m^2 - 10m + 1} & < 10m \\ -3m + 1 + \sqrt{9m^2 - 10m + 1} & > 10m \end{cases}$$

   - Pour $m \in]-\infty, 0[$ on résoud le système suivant:

$$\begin{cases} -3m + 1 - \sqrt{9m^2 - 10m + 1} & > 10m \\ -3m + 1 + \sqrt{9m^2 - 10m + 1} & < 10m \end{cases}$$

   L'ensemble solution du second système est vide et l'ensemble solution du premier système correspond à son domaine de validité. Ainsi pour $m \in]0, \frac{1}{5}] \in [1, +\infty[$, f admet deux racines x' et x'' qui vérifient $x' < 5 < x''$

20. Soit $f(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - 4x + 3}$.

   a. On suppose que f n'admet ni maximum, ni minimum. Alors la dérivée de f

ne s'annule jamais.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x-a)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-ax)}{(x^2-4x+3)^2} \\
&= \frac{-8x^2+6x-ax^2+4ax-3a-2x^3+2ax^2+4x^2-4ax}{(x^2-4x+3)^2} \\
&= \frac{-4x^2+ax^2+6x-3a}{(x^2-4x+3)^2} \\
&= \frac{x^2(a-4)+6x-3a}{(x^2-4x+3)^2}
\end{aligned}
$$

Si $f' \neq 0$, alors le discriminant du numérateur de f' est négatif. On a:

$$
\begin{aligned}
&\Delta = 12a^2 - 48a + 48 \\
&\Delta = 12(a^2-4a+3)\Delta < 0 && \iff a^2-4a+3<0 \\
&\quad \iff a \in]1,3[
\end{aligned}
$$

En conlusion, pour $a \in]1,3[$, f n'admet ni maximum, ni minimum.

b. f admet un maximum M et un minimum m. Pour cela, il faut que le numerateur de f' s'annule en deux points, et d'après les calculs précédents, $a \in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$.

c. f n'admet qu'un minimum. Il faut que le discriminant du numérateur s'annule et que la dérivée seconde de f soit strictement positive. On a ainsi $a = 3$.

Corrigé 2013

Ecole Nationale de la Statistique et
de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique 2012/2013

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A
CORRIGE-TYPE

1 Calcul de limite en *zéro* des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4 - 1 - 4x\right]\ ; \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

- $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4 - 1 - 4x\right]$

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4 - 1 - 4x\right] = \frac{1}{2}\left[6 + 4x + x^2\right] \qquad \forall x \neq 0$$

$\boxed{\lim_{x\to 0} \ f(x) = 3}$

- $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. En posant $y^6 = 1 + x$,

$$\lim_{x\to 0} \ g(x) = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}.$$

$\boxed{\lim_{x\to 0} \ g(x) = \frac{3}{2}}$

2 Calcul des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \ \sin(x)\left[x - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\ ; \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{3}{x^3-1}\right).$$

avec $\mathrm{E}(x)$ désignant la partie entière de x.

• $\lim\limits_{x\to 0} \ \sin(x)\left[x - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$\forall x \neq 0 \qquad \sin x\left[x - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = x\sin(x) - \dfrac{\sin x}{x} * x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$ et comme $\lim_{x\to 0} x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

car $x\left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)\right) \leq x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $x\left(\frac{1}{x}\right) \leq x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x\left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)\right)$ si $x < 0$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \ \sin(x)\left[x - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -1}$

• $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{3}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{5(x^2+x+1) - 3(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x + 2}{(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-3x^3 - 6x^2 - 4x - 2}{(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{-3-6-4-2}{5*3} = \frac{-15}{15} = -1$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right) = -1}$

3 Peut-on prolonger par continuité en zéro la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$? Justification.

Posons $y_n^1 = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $y_n^2 = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$

Si on pose $x = \dfrac{1}{y_n^1}$. Quand $x \to 0$, $y_n^1 \to +\infty$ avec $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n^1) = +\infty \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} f(y_n^2) = -\infty$$

Donc on ne peut pas prolonger par continuité f.

4 Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$ fixés. Calcul suivant les valeurs de a et b $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1 - (\frac{b}{a})^n}{1 + (\frac{b}{a})^n}$$

• si $a > b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = 1$

• si $a = b$ alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = 0$

• si $a < b$ alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\frac{a}{b})^n - 1}{(\frac{a}{b})^n + 1} = -1$

5 $a)$ Montrons que, si $p < 0$, la fonction $f : x \longmapsto x^3 + px + q$ admet un maximum M et un minimum m.
On a $f'(x) = 3x^2 + p$ et $f''(x) = 6x$. Sur $]-\infty; 0]$ $f''(x) < 0$ et sur $]0; +\infty[$ $f''(x) > 0$ et donc $f'(x) = 0 \iff 3x^2 + p = 0$ avec $p < 0 \iff x^2 = \dfrac{-p}{3} \iff x = \pm\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$
Donc si $p < 0$, f admet un maximum M sur $]-\infty; 0]$ et un minimum m sur $]0; +\infty[$.

$b)$ Calculons le produit $M.m$ en fonction de p et q.

$$M.m = f(-\sqrt{\frac{-p}{3}}).f(\sqrt{\frac{-p}{3}}) = [(-\sqrt{\frac{-p}{3}})^3 + p(-\sqrt{\frac{-p}{3}}) + q][(\sqrt{\frac{-p}{3}})^3 + p(\sqrt{\frac{-p}{3}}) + q]$$

$$= [-(\frac{-p}{3})\sqrt{\frac{-p}{3}} - p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q][\frac{-p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q] = \frac{4p^3}{27} + q^2$$

Déduisons-en que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet trois racines distinctes si et seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$.
En effet, $Mm < 0$ si et seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc f admet trois racines distinctes.

6 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ donné, résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x + \sqrt{x + a}} = a$.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sqrt{x + \sqrt{x + a}} = a \iff \begin{cases} x + a \geq 0 \\ x + \sqrt{x + a} \geq 0 \\ x + \sqrt{x + a} = a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + a \geq 0 \\ x + \sqrt{x + a} = a^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + a \geq 0 \\ x + a = (a^2 - x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + a \geq 0 \\ x^2 - (2a^2 + 1)x - a + a^4 = 0 \end{cases}$$

$\Delta = (2a^2 + 1)^2 + 4a - 4a^4 = (2a + 1)^2 \geq 0$
$x_1 = a^2 + a + 1$ et $x_2 = a^2 - a$.

$a^2 + a + 1$ ne vérifie pas l'équation. Donc cette équation a une solution unique : $a^2 - a$

(7) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f_1 et f_n les fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ par : $f_1(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, et $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$. Calculons $f_{2013}(2013)$
Il suffit de calculer f_2, f_3 et f_4.

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x} f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$$

Donc $f_2(x) = f_1(f_1(x)) = 1 - \dfrac{x}{x-1} = -\dfrac{1}{x-1}$; $f_3(x) = f_1(f_2(x)) = x$
et $f_4(x) = f_1(f_3(x)) = 1 - \dfrac{1}{x}$
Ainsi, $f_n(x) = f_{nmod4}(x)$. Par suite, $\boxed{f_{2013}(2013) = f_1(2013) = 1 - \dfrac{1}{2013}}$

(8) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\textbf{(E)} \qquad \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

$a)$ Montrons que x est solution de $(\mathbf{E})$ si, et seulement si

$$(\mathbf{E}') \qquad \left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1.$$

Il suffit juste de remarquer que :
$x + 3 - 4\sqrt{x-1} = (2 - \sqrt{x-1})^2$ et $x + 8 - 6\sqrt{x-1} = (3 - \sqrt{x-1})^2$.
D'où

$$(\mathbf{E}') \qquad \left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1.$$

$b)$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|u-2| + |u-3| = 1$.
$|u-2| + |u-3| = 1 \iff |u-2| = 1 - |u-3|$
$\iff \begin{cases} |u-3| \leq 1 \\ (u-2)^2 = 1 + (u-3)^2 - 2|u-3| \end{cases}$ (Après avoir enlevé les valeurs absolues,)
$\iff \begin{cases} u - 3 = u - 3 \\ u \leq 3 \\ u^2 - 6u + 8 < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u - 3 = -u + 3 \\ u \geq 3 \\ u^2 - 6u + 8 \leq 0 \end{cases}$
D'où $\boxed{S_{(\mathbf{E}'')} = [2; 3]}$

Conclusion pour l'équation $(\mathbf{E})$
Pour $(\mathbf{E})$, on pose $u = \sqrt{x-1} \iff \begin{cases} 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$
D'où $\boxed{S_{(\mathbf{E})} = [5; 10]}$

9 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^8}=0$$

Pour $x=1$, l'équation n'est pas vérifié. Donc $x=1$ n'est pas solution.

De plus, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^8}=\dfrac{1}{x}*\dfrac{1-(\dfrac{1}{x})^8}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}(1-\dfrac{1}{x^8})*\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x^8-1}{x^8}*\dfrac{1}{x-1}$

Comme $x\neq 1$ et $x\neq 0$ alors $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^8}=0 \iff x^8-1=0 \iff x=\pm\sqrt[8]{1}$

D'où $\boxed{x=-1}$ est la solution de l'équation $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^8}=0$.

10 Soit un polynôme $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ où $a_i\in\mathbb{N}\ \forall i=0,1,\ldots,n$. Montrer que 1 est racine de $B(x)=P(x)-S$, où S est la somme des coefficients du polynôme P.

$P(1)=a_n+a+\ldots+a_1+a_0=S$. Donc 1 est racine de $B(x)=P(x)-S$.

$N=a_n\,a_{n-1}\cdots a_2a_1a_0=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_210^2+a_110+a_0$ Déduisons que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9. Démonstration par récurrence.

Si $N=a_1\times 10+a_0$. N est divisible par 9 ssi $10a_1+a_0=9k \iff 9a_1+a_1+a_0=9k \iff a_1+a_0$ divisible par 9.

Supposons qu'au rang n on a le résultat et montrons qu'on l'a aussi au rang $n+1$. Posons aussi N_n l'entier au rang n.

$N_{n+1}=a_{n+1}\times 10^{n+1}+N_n \iff N_{n+1}$ est divisible par 9 ssi $a_{n+1}+9k+S_n$ divisible par 9.

$N_{n+1}=(1+9)^{n+1}a_{n+1}+9k+S_n=[9^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}9^k+1]a_{n+1}+9k+S_n$. et donc c'est divisible par 9 ssi S_n+a_{n+1} divisible par 9.

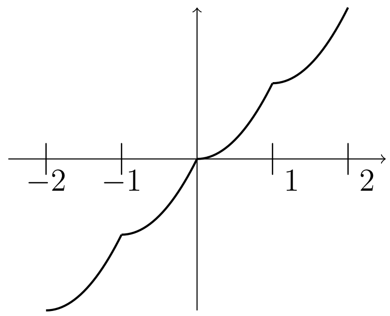
11 Soit la fonction f définie par $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2, x\in\mathbb{R}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et traçons la courbe de f pour $x\in[-2,2]$.

f est continue sur $]n,n+1[\forall n\in\mathbb{Z}$. Donc étudions la continuité pour $n\in\mathbb{Z}$.

$$\lim_{x\to n^+}f(x)=\lim_{x\to n^+}n+(x-n)^2=n \quad \text{et} \lim_{x\to n^-}f(x)=\lim_{x\to n^-}n-1+(x-n+1)^2=n$$

Donc f est continue en n. D'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

Construction de la courbe de f



(12) On considére les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par

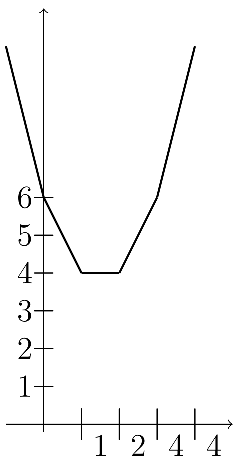
$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} |x-k| \text{ et } g(x) = f(x) + |x-4|$$

Construisons les courbes de f et de g dans deux repères differents et déduisons-en leurs extrémums.

$f(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + |x-3|$.

$$f(x) = \begin{cases} x+x-1+x-2+x-3 = 4x-6 & \text{si } x \geq 3 \\ x+x-1+x-2-x+3 = 2x & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x+x-1-x+2-x+3 = 4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x-x+1-x+2-x+3 = -2x+6 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -x-x+1-x+2-x+3 = -4x+6 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x-6 & \text{si } x \geq 3 \\ 2x & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -2x+6 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -4x+6 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



Pour g, c'est le même principe et on obtient:

13 Montrons que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,|x|$ est bijective. f est impaire et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$.
La restriction de f sur $\mathbb{R}_+$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ à $\mathbb{R}_+$ et admet pour réciproque la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x}$.
Il en résulte que f est une bijection définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa réciproque est g définie par:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de la fonction réciproque g et définir g'.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en 0. Et :

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$$

14 $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1$

$a)$ Montrons qu'un réel $\alpha \neq 0$ est racine de $P(x)$ si et seulement si α est solution de l'équation **(E")** : $x^2 - x - 4 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$.
$P(0) = 1 \neq 0$. Donc 0 n'est pas racine de $P(x)$.
$P(\alpha) = 0 \iff \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \iff \alpha^2(\alpha^2 - \alpha - 4 - \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2}) = 0$ car $\alpha \neq 0$.
D'où $\alpha^2 - \alpha - 4 - \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} = 0$

$b)$ $u = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$, Résolvons l'équation **(E")** et déduisons-en les racines de $P(x)$.
$(\alpha + \dfrac{1}{\alpha})^2 = \alpha^2 + 2 + \dfrac{1}{\alpha^2}$. Donc $\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2} = u^2 - 2$.
(E") devient $u^2 - 2 - u - 4 = 0 \iff u^2 - u - 6 = 0$.
Les solutions de cette équation sont -2 et 3.

$$u = -2 \iff \alpha + \frac{1}{\alpha} = -2 \iff \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \iff \alpha = -1$$

$$u = 3 \iff \alpha + \frac{1}{\alpha} = 3 \iff \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \iff \alpha_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

. Au total, l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \{-1, \alpha_1, \alpha_2\}}$

15 On pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

$a)$ Déterminons les constantes réelles $a,\ b$ et c telles que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
On obtient $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = -1$.

$b)$ Déduisons-en une expression simple de U_n en fonction de n puis calculons $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

$$\begin{aligned}
U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
&= 1 - \frac{3n+4}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

16 Étudions la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x|^{\alpha} \sin\frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

où α est un rationnel strictement positif fixé puis la continuité de la fonction dérivée de f.
f est impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x > 0, \quad |f(x)| = |x|^{\alpha}|\sin\frac{1}{x}| \leq |x|^{\alpha}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et f est continue en 0.
Posons $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$ et donc φ n'a pas de limite en 0 quand $0 \leq \alpha \leq 1$ et si $\alpha > 1$, $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0 \to f'(0) = 0$.

De plus, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$ $f'(x) = x^{\alpha-2}(\alpha x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$. On en déduit que si $\alpha \geq 2$, f n'a pas de limite en 0.

En somme, $\left|\begin{array}{ll} 0<\alpha\leq 1 & f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \\ 1<\alpha\leq 2 & f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}^* \\ \alpha>2 & f \text{ est dérivable et de dérivée continue sur } \mathbb{R}^*. \end{array}\right.$

17 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,on considère les fonctions f_n, g_n et h_n définie sur $]0,1[$ par :

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\,x^k \text{ et } h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2\,x^k.$$

$a)$ Exprimons simplement $f_n(x)$ sans le signe $\sum$.
f_n est une somme de termes d'une suite géométrique de raison x. Donc $f_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$b)$ Établissons une relation entre $g_n(x)$ et $f_n'(x)$ $\quad \forall x \in]0,1[$.

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = \sum_{k=0}^{n-1} k\,x^k + \sum_{k=0}^{n-1} x^k = g_n(x) - nx^n + f_n(x) - x^n$$

Déduisons-en les expressions simplifiées de $g_n(x)$ et de $h_n(x)$ sans le signe $\sum$.
De ce qui précède, $g_n(x) = f_n'(x) + nx^n - f_n(x) + x^n$.

$$f_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

$$g_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + (n+1)x^n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

On fait pareille en dérivant g_n et on obtient $h_n(x) = g_n'(x) - 2g_n(x) - f_n(x) + (n+1)^2x^n$

$c)$ Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1-x}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}}$

Vous calculerez la valeur de la limite après avoir calculer h_n.

(18) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{(-x^2+3x+4)(x^2-x-2)}{3x^2+4x-7} \leq 0.$
Les racines des termes un à un sont:

- $-x^2+3x+4$

$\Delta = 25$. Donc les racines sont $x_1 = \dfrac{-3-5}{-2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{-2} = -1$

- x^2-x-2

$\Delta = 9$. Donc les racines sont $x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$

- $-x^2+3x+4$

1 est racine et l'autre racine est $-\dfrac{7}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		-1		1		2		4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-2		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$3x^2+4x-7$		$+$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(-x^2+3x+4)(x^2-x-2)}{3x^2+4x-7}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\text{S=}]-\infty,\frac{7}{3}[\cup]1,2]\cup[4,+\infty[\cup\{-1\}}$$

(19) Etudions la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f telle que $f(x) = cos\left(\sqrt{x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x})-\cos(\sqrt{0})}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2}$$

Donc la fonction f est dérivable à droite et elle n'est définie que sur $\mathbb{R}+$

(20) On considère une suite arithmétique $(a_n)_{n\geq 1}$ de raison $r \neq 0$ avec $a_n > 0,\ \ \forall n \geq 1$. Prouvons que :

a) $$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Par récurrence, pour $n=3$,

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-r}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-r}$$

$$=\frac{1}{r}(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_1})=\frac{1}{r}\frac{a_3-a_1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_1}}=\frac{2r}{r(\sqrt{a_3}+\sqrt{a_1})}=\frac{2}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_1}}$$

Donc la proposition est vraie à l'ordre 3. Supposons vraie, la proposition jusqu'à un certain rang n et vérifions si elle l'est aussi à l'ordre $n+1$. Ainsi, on a:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}}+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

$$=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

$$=\frac{(n-1)(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})}{a_n-a_1}+\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{(n-1)(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})}{(n-1)r}+\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{r}$$

$$=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{r}=\frac{a_{n+1}-a_1}{r(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1})}=\frac{nr}{r(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1})}=\frac{n}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1}}$$

Donc la proposition est vraie $\forall n \geq 1$.

b) $$\frac{1}{a_1\,a_2}+\frac{1}{a_2\,a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}\,a_n}=\frac{n-1}{a_1\,a_n}.$$

Il suffit de remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{a_n\,a_{n-1}}=\frac{1}{r}(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n})$$

Donc $\frac{1}{a_1\,a_2}+\frac{1}{a_2\,a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}\,a_n}=\frac{1}{r}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n})$

$$=\frac{1}{r}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n})=\frac{a_n-a_1}{r\,a_1\,a_n}=\frac{(n-1)\,r}{r\,a_1\,a_n}=\frac{n-1}{a_1\,a_n}$$

FIN DU CORRIGÉ-TYPE

Corrigé 2014

Ecole Nationale de la Statistique et
de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique 2013/2014

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A CORRIGÉ - TYPE

(1) Calculons les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x-1}-x,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x},\quad \lim_{n\mapsto+\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right).$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x-1}-x$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x-1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2x-1)-x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1}=1$$

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

Comme $\tan(x-\dfrac{\pi}{3})=2\tan(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3})\times\dfrac{1}{1-\tan^2(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6})}$

et $1-2\cos x=2[\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos x]=-4\sin(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2})\sin(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6})$

quand $x\neq\dfrac{\pi}{3}$, $\frac{\tan x\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\dfrac{1}{2\ \cos(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3})\ \sin(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3})\,[1-\tan^2(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6})]}$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=1$

- $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n})$

$$\lim_{n\mapsto+\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}) = \lim_{n\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

2 Montrons que pour tout réel x et y non nuls :

$$(E) : 2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6\geq 0.$$

Posons $a=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ L'inéquation (E) devient alors :

$2(a^2-2)-3a+6\geq 0 \Rightarrow 2a^2-3a+6\geq 0 \Rightarrow 2(a^2-\dfrac{3}{2}a+1)\geq 0$

$\Delta=\dfrac{9}{4}-4<0$. Donc $a^2-\dfrac{3}{2}a+1\geq 0 \quad \forall\, a$

D'où (E) vraie quand x et y sont non nuls.

3 Soit P et Q deux polynômes

$a)$ Montrons que si P et Q sont différents du polynôme nul, alors leur produit $P\times Q$ n'est pas le polynôme nul.

Supposons P et Q différents du polynôme non nuls de degré p et q.

Donc $\exists\, a_{i_0}\ et\ b_{k_0}$ tel que $a_{i_0}\neq 0$ et $b_{k_0}\neq 0$ et que $P(x)=\sum_{j=0}^{p}x^j\,a_j$ et

$Q(x)=\sum_{j=0}^{q}x^j\,b_j$. Donc $PQ(x)=\sum_{j=0}^{p+q}a_i\,b_k\,x^j \quad avec\ i+k=j$.

Le terme $x^{i_0+k_0}$ a pour coefficient $a_{i_0}\,b_{k_0}\neq 0$.

$b)$ Déduisons-en que si le produit $P\times Q$ est le polynôme nul alors P ou Q est le polynôme nul.

$P \times Q = 0$ donc $\forall\, x\ PQ(x) = 0$. Supposons P et Q différents du polynôme de degré p et q.

Alors on montre que P admet au moins $(p+1)$ racine ou que Q admet au moins $(q+1)$ racines facilement. Ainsi $P = 0$ ou $Q = 0$.

Cette propriété n'est pas vérifiée par l'ensemble de fonctions numériques. Contre exemple:

Soit $f(x) = x + |x|$ et $g(x) = x - |x|$. On a $f(x).g(x) = 0\ \forall\, x$

4 Déterminons quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6 sachant que leur produit est 385

Les quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 6 sont : $-7\,,\ -1\,,\ 5\,,\ 11.$

Le produit est 385.

5 Déterminons suivant les valeurs du réel α les asymptotes de la courbe de la fonction f_α, définie par: $f_\alpha(x) = \dfrac{(\alpha^2+1)x^2+\alpha^2-1}{(\alpha+1)x+\alpha-1}$.

- Si $\alpha = 0$ on a $f_0(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1\ \forall\, x \in \mathbb{R} - \{1\}$. La courbe de f est une droite privée du point $A(1,2)$.
- Si $\alpha = +1,\ f_1(x) = \dfrac{2x^2}{2x} = x\ \forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}$. La courbe de f est une droite privée du point origine $O(0,0)$.
- Si $\alpha = -1,\ f_{-1}(x) = \dfrac{2x^2}{-2} = x^2$. La courbe de f est une parabole
- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1,0,1\}$. La courbe de f admet une :
  - * asymptote "verticale" d'équation $x = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} = x_\alpha$
  - * asymptote "oblique" dont l'équation est obtenue par exemple par division euclidienne :

  L'équation de l'asymptote oblique est alors $y = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}x - \dfrac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{(\alpha+1)^2}$

6 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ donné, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+\sqrt{x+a}} = a$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sqrt{x+\sqrt{x+a}} = a \iff \left\{\begin{array}{l} x+a \geq 0 \\ x+\sqrt{x+a} \geq 0 \\ x+\sqrt{x+a} = a^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+a \geq 0 \\ x+\sqrt{x+a} = a^2 \end{array}\right.$$

$$
\begin{array}{llll|l}
(\alpha^2+1)X^2 & + & & \alpha^2-1 & (\alpha+1)X+\alpha-1 \\
\cline{5-5}
-((\alpha^2+1)X^2 & + & \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X) & & \frac{\alpha^2+1}{\alpha+1}X-\frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{(\alpha+1)^2} \\
\hline
\bullet & - & \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X & +\ \alpha^2-1 & \\
 & - & (-\frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}X & -\ \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2}) & \\
\cline{3-4}
 & & \bullet & +\ \alpha^2-1+\frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2} &
\end{array}
$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+a \geq 0 \\ x+a=(a^2-x)^2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+a \geq 0 \\ x^2-(2a^2+1)x-a+a^4=0 \end{array} \right.$$

$\Delta = (2a^2+1)^2+4a-4a^4 = (2a+1)^2 \geq 0$
$x_1 = a^2+a+1$ et $x_2 = a^2-a$.

a^2+a+1 ne vérifie pas l'équation. Donc cette équation a une solution unique : a^2-a

7) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f_1 et f_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ par :

$$f_1(x) = 1-\frac{1}{x}, \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)).$$

Calculons $f_{2014}(2014)$
Il suffit de calculer f_2, f_3 et f_4.

$$f_1(x) = 1-\frac{1}{x} f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$$

Donc $f_2(x) = f_1(f_1(x)) = 1-\dfrac{x}{x-1} = -\dfrac{1}{x-1}$; $f_3(x) = f_1(f_2(x)) = x$
et $f_4(x) = f_1(f_3(x)) = 1-\dfrac{1}{x}$
Ainsi, $f_n(x) = f_{nmod4}(x)$. Par suite, $\boxed{f_{2014}(2014) = f_3(2014) = 2014}$

8) Simplifier l'expression $B = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.
On cherche à mettre $20+14\sqrt{2}$ sous la forme $(a+b\sqrt{2})^2$. Par développement, et identification on a $a=2$, $b=1$
$B = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4.$

9 Soit φ et h les fonctions définies par

$$\varphi(x) = x - \mathrm{E}(x), \text{ et } h(x) = |2x - 1|,$$

et soit $f = h \, o \, \varphi$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x

Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, paire et admet 1 pour période.

$f(x) = h(\varphi(x)) = |2(x - E(x)) - 1| = |2x - 2E(x) - 1|$

$f(x+1) = |2(x+1) - 2E(x+1) - 1| = |2x - 2E(x) + 2 - 2 - 1| = |2x - 2E(x) - 1| = f(x)$

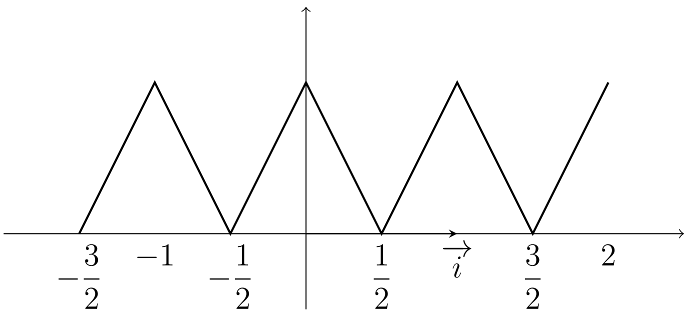
Donc f est périodique de période 1. Ainsi, il suffit d'étudier f sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a :

$$\begin{cases} \forall\, x \in]0, \frac{1}{2}[& \varphi(x) = x & f(x) = |2x - 1| = 1 - 2x \\ \forall\, x \in [-\frac{1}{2}, 0] & \varphi(x) = x - (-1) & f(x) = |2x + 1| = 2x + 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

De plus $\left\| \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(1 - 2x) = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x + 1) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$

Donc f est continue. La restriction de f a l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est paire et continue.

Représenter graphiquement f en repère normé.



10 On considère la suite (U_n) telle que $U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $U_0 = \frac{2}{3}$.

On pose $V_n = U_n\sqrt{2} - n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$a)$ Etudions la nature de la suite (V_n) de terme général V_n

$V_n = U_n\sqrt{2} - n$

$V_{n+1} = U_{n+1}\sqrt{2} - (n + 1) = (\frac{U_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + 2)\sqrt{2} - (n + 1)$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2}U_n + n + 2 - 2(n+1)) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}U_n - n) = \frac{1}{2}V_n.$$ Donc V_n est une suite géometrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

$b)$ Déduisons-en U_n en fonction de n et calculons $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$.

Ainsi $V_n = V_0\, q^n$ où q est la raison de (V_n). Dons $V_n = \frac{2}{3}\sqrt{2}(\frac{1}{2})^n$.

Par suite, $\boxed{U_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_n + n)}$

Et donc $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{i=0}^{n} V_i + \sum_{i=0}^{n} i)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{2\sqrt{2}}{3}(\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1/2}) + \frac{n(n+1)}{2}]$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} U_i = \frac{4}{3}(1-(\frac{1}{2})^{n+1}) + \frac{\sqrt{2}}{4}(n+1)}$$

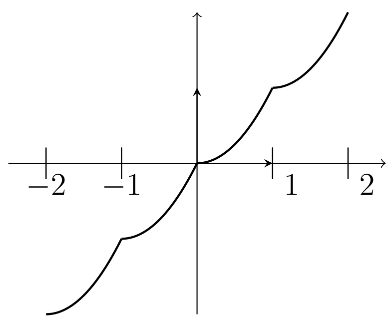
11 Soit la fonction f définie par $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2, x \in \mathbb{R}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et traçons la courbe de f pour $x \in [-2, 2]$.

f est continue sur $]n, n+1[\forall n \in \mathbb{Z}$. Donc étudions la continuité pour $n \in \mathbb{Z}$.

$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} n + (x-n)^2 = n$ et $\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} n - 1 + (x - n + 1)^2 = n$

Donc f est continue en n. D'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

Construction de la courbe de f



(12) Résolvons le système d'inéquations suivant

$$\begin{cases} |x^2-1| & \leq 3 \\ 2-x & < x^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x^2-1| & \leq 3 \\ 2-x & < x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 & \leq 3 \\ x^2-1 & \geq -3 \\ 2-x & < x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 & \leq 4 \\ x^2 & \geq -3+1 \\ x^2+x-2 & > 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2\,,\,2] \\ (x-1)\,(x+2) & > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2\,,\,2] \\ x \in]-\infty\,,\,-2[\cup]1\,,\,+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S =]1\,,\,2]}.$$

(13) Trouvons le réel α tel que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$ vérifie:

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

f est dérivable. Posons $U(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} = \frac{U'(x)}{2f(x)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{U''(x)\sqrt{U(x)} - \dfrac{(U'(x))^2}{2\sqrt{U(x)}}}{U(x)} = \frac{1}{4\,U(x)\sqrt{U(x)}}[2U''(x)U(x) - (U'(x))^2]$$

.

$$(1+x^2)f''(x) = \frac{(1+x^2)}{4\,U(x)f(x)}[\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}(\sqrt{1+x^2} - 2x^2\sqrt{1+x^2} - 2x^3)]$$

$$\text{et } xf'(x) = \frac{x(x+\sqrt{1+x^2})}{2\,f(x)\sqrt{1+x^2}}. \text{ Posons :} A = (1+x^2)f''(x) + xf'(x)$$

$$A = \frac{(1+x^2)}{4\,U(x)f(x)}[\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}(\sqrt{1+x^2} - 2x^2\sqrt{1+x^2} - 2x^3)] + \frac{x(x+\sqrt{1+x^2})}{2\,f(x)\sqrt{1+x^2}}$$

$$. \qquad = \frac{1}{4\,U(x)f(x)\sqrt{1+x^2}}[\sqrt{1+x^2} - 2x^2\sqrt{1+x^2} - 2x^3 + 2x(2x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} + 1)]$$

$$= \frac{1}{4\,U(x)f(x)\sqrt{1+x^2}}[\sqrt{1+x^2} + 2x^2\sqrt{1+x^2} + 2x^3 + 2x] = \frac{1 + 2x^2 + 2x\sqrt{1+x^2}}{4\,U(x)f(x)}$$

$$= \frac{1}{4\,U(x)f(x)}U^2(x) = \frac{U(x)}{4\,f(x)} = \frac{1}{4}f(x)$$

D'où $\alpha = \dfrac{1}{4}$

14) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la somme des cubes des n premiers entiers naturels impairs est égale à $2n^4 - n^2$.

Soit $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$. Montrons que $S_n = 2n^4 - n^2$

Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $2 \times 1^4 - 1^2 = 2 - 1 = 1$. Donc la relation est vraie au rang 1.

Supposons qu'elle est vraie au rang n et montrons qu'elle l'est aussi au rang $n+1$.

$$S_{n+1} = 1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3+(2n+1)^3 = S_n+(2n+1)^3 = 2n^4-n^2+(2n+1)^3$$

$$= 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(n^4 + 6n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - (n^2 + 2n + 1)$$
$$= 2(n+1)^4 - (n+1)^2.$$

Donc $S_{n+1} = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$

15) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

Comme $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ alors $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$.

Ainsi $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ or $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Donc $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

De même, on montre que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

Par suite $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

Déduisons-en la partie entière du nombre réel $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=10000} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

D'après ce qui précède, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=10000} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < A < \sum_{k=1}^{k=10000} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

Donc $\sqrt{10001} - 1 < A < \sqrt{10000}$.

Ainsi, $99 < \sqrt{10001} - 1 < A < 100$. D'où $E(A) = 99$

16 Déterminons le réel a pour que le polynôme $A(x) = x^4 - x + a$ soit divisible par le polynôme $B(x) = x^2 - ax + 1$.

Faisons une division euclidienne.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
x^4 & & & & & - & x & + & a & x^2 - ax + 1 \\
\cline{10-10}
-(x^4 & - & ax^3 & + & x^2) & & & & & x^2 + ax + (a^2 - 1) \\
\cline{1-5}
\bullet & & ax^3 & - & x^2 & - & x & + & a & \\
& - & (x^3 & - & a^2x^2 & + & ax) & & & \\
\cline{3-7}
& & \bullet & & (a^2-1)x^2 & - & (a+1)x & + & a & \\
& & & - & ((a^2-1)x^2 & - & a(a^2-1)x & + & (a^2-1)) & \\
\cline{5-9}
& & & & \bullet & & (a^3 - 2a - 1)x & - & (a^2 - a - 1) &
\end{array}$$

$A(x)$ divisible par $B(x)$ si et seulement si $\begin{cases} a^3 - 2a - 1 = 0 \\ a^2 - a - 1 = 0 \end{cases}$

$a^2 - a - 1 = 0$. $\Delta = 1 + 4 = 5 \quad a_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad a_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Aucune des solutions de $a^2 - a - 1 = 0$ n'est solution de $a^3 - 2a - 1 = 0$.

Donc $B(x)$ ne divise pas $A(x) \,\forall\, a$

17 Trouvons les points pour lesquels la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \sin^{2n}(x) - \cos^{2n}(x)$, admet un extrémum; n étant un entier naturel non nul fixé.

$$f'(x) = 2n \cos x \sin x[\sin^{2n-2}(x) + \cos^{2n-2}(x)] = 4n \sin(2x)[\sin^{2n-2}(x) + \cos^{2n-2}(x)]$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$x_k = \dfrac{1}{2}k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

f s'annule en x_k en changeant de signe. Donc les points cherchés sont $\boxed{x_k = \dfrac{1}{2}k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$.

18 Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

On peut le faire par deux méthodes :

1^{ere} méthode : Développement de $a^n - b^n$.

Pour $n = 0, 1 - 1 = 0$. 0 divise 7.

Pour $n = 1, 3^2 - 2 = 7$. 7 divise 7.

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k} \quad \forall n \geq 1$$

. Donc $3^{2n} - 2^n = 9^n - 2^n = (9-2)\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 9^{n-1-k} = 7\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 9^{n-1-k}$.

On voit clairement que 7 divise $3^{2n} - 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2^{eme} méthode : Par récurrence.

Pour $n = 0, 1 - 1 = 0$. 0 divise 7.

Pour $n = 1, 3^2 - 2 = 7$. 7 divise 7.

Supposons que 7 divise $3^{2n} - 2^n$ pour un certain rang n et montrons que la relation est valable au rang $n+1$.

$$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2 = 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = (7+2) \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = 7(3^{2n}) - 2 \times (3^{2n} - 2^n)$$

– Par hypothèse de récurrence, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

  Donc $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 7.3^{2n} + 2 \times 7.\alpha_n = 7(3^{2n} + 2\alpha_n)$

  Donc 7 divise $3^{2n} - 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

19 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.
$a)$ Déterminons a, b, c pour que $(\mathcal{C})$ ait les propriétés suivantes :
– $(\mathcal{C})$ passe par le point $A(0; 5)$
– la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses;
– la tangente à $(\mathcal{C})$ au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3.

•$(\mathcal{C})$ passe par le point $A(0; 5)$
Donc $f(0) = 5$. Ainsi, $\frac{c}{-2} = 5 \Rightarrow \underline{\underline{c = 10}}$.
• la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses;
Donc $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x-2) - (ax^2 + bx + c)}{(x-2)^2} = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x-2)^2}$$

$f'(0) = 0 \Rightarrow \dfrac{-2b-c}{4} = 0 \Rightarrow -2b+10 = 0 \Rightarrow b = 5.$

• la tangente à $(\mathcal{C})$ au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3

Donc $f'(1) = 3$. Ainsi $f'(1) = \dfrac{a-4a-2b-c}{1} = 3 \Longleftrightarrow a = -1$

Au total, $\boxed{(a, b, c) = (-1, 5, -10)}$.

Aussi, $f(x) = \dfrac{-x^2+5x-10}{x-2}$ et $f'(x) = \dfrac{-x^2+4x}{(x-2)^2}$

$b)$ Étudions les variations de la fonction f ainsi obtenue.

f est définie, continue et dérivable su les ensembles $]-\infty\,,\,2[$ et $]2\,,\,+\infty[$.

$$\lim_{-\infty} f = +\infty\,,\ \lim_{+\infty} f = -\infty\,,\ \lim_{2^+} f = -\infty\,,\ \lim_{2^-} f = +\infty$$

Signe de f'

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow -x^2+4x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

Tableau de variation

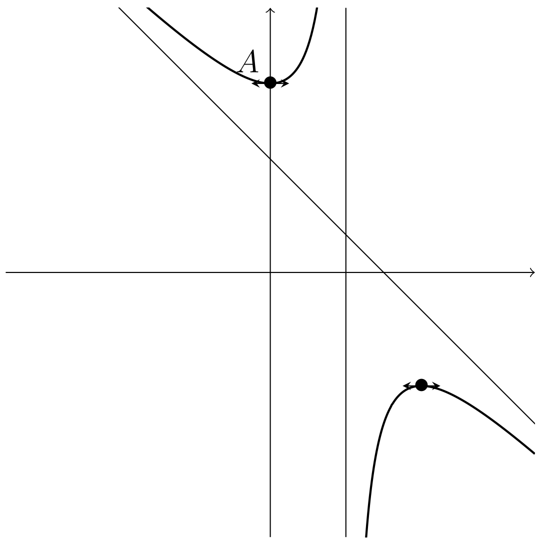
x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Traçons $(\mathcal{C})$

Étudions d'abord les branches infinies.

$$\lim_{\infty} f = \infty \ , \ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \ , \ \lim_{x\to\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x - 10}{x - 2} = 3$$

Donc la droite d'équation $y = -x+3$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage des deux infinies.



(20) Déterminons le réel m pour que l'équation $(m-1)x^2 - mx + 3m + 1 = 0$ ait deux solutions x' *et* x'', telles que $x' < 2 < x''$.

Pour $m = 1$, l'équation devient une équation du premier degré et admet une solution unique.

Pour $m \neq 1$, Calculons le discriminant :

$\Delta = m^2 - 4(3m+1)(m-1) = m^2 - 12m^2 + 12m - 4m + 4 = -11m^2 + 8m + 4$

$\delta' = 16 + 44 = 60 = (2\sqrt{15})^2 \quad , \quad m_1 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{15}}{11} \quad , \quad m_1 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{15}}{11}$

m	$-\infty$		m_1		m_2		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

Comme nous cherchons des valeurs de m pour lesquelles l'équation a deux solutions alors $m \in]m_1, m_2[$.

Et dans ce cas, on a $x' = \dfrac{m - \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)}$ et $x'' = \dfrac{m + \sqrt{-11m^2 + 8m + 4}}{2(m-1)}$.

$$
\begin{aligned}
x' < 2 < x'' &\Longleftrightarrow \frac{m-\sqrt{-11m^2+8m+4}}{2(m-1)} < 2 < \frac{m+\sqrt{-11m^2+8m+4}}{2(m-1)} \\
&\Longleftrightarrow m-\sqrt{-11m^2+8m+4} < 4(m-1) < m+\sqrt{-11m^2+8m+4} \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{-11m^2+8m+4} < 3m-4 < \sqrt{-11m^2+8m+4} \\
&\Longleftrightarrow |3m-4| < \sqrt{-11m^2+8m+4} \Leftrightarrow (3m-1)^2 < -11m^2+8m+4 \\
&\Longleftrightarrow 9m^2-24m+16 < -11m^2+8m+4 \Leftrightarrow 20m^2-32m+12<0 \\
&\Longleftrightarrow 5m^2-8m+3<0.
\end{aligned}
$$

On a : $\Delta' = 16-15 = 1$. Et $m' = \dfrac{4-1}{5} = \dfrac{3}{5}$ et $m'' = \dfrac{4+1}{5} = 1$

m	$-\infty$		$3/5$		1		$+\infty$
$5m^2-8m+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $5m^2-8m+3<0$ si $m \in \left]\dfrac{3}{5}, 1\right[$.

Comme $\left]\dfrac{3}{5}, 1\right[\subset]m_1, m_2[$ alors l'ensemble recherché est $\left]\dfrac{3}{5}, 1\right[$.

D'où $\forall\, m \in \left]\dfrac{3}{5}, 1\right[$, l'équation $(m-1)x^2-mx+3m+1=0$ admet deux solutions x' *et* x'', telles que $x'<2<x''$.

FIN DU CORRIGÉ-TYPE